Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932

II. Band / Sektions-Vorträge

Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932

II. Band

Sektions-Vorträge

Im Auftrage des Komitees für den Internationalen Mathematiker-Kongress Zürich 1932 herausgegeben von

Dr. Walter Saxer

Professor an der Eidg. Techn. Hochschule



ORELL FÜSSLI VERLAG ZÜRICH UND LEIPZIG

Inhaltsverzeichnis

Algebra und Zahlentheorie
Algèbre et théorie des nombres

Analysis
Analyse

Geometrie
Géométrie

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik und Statistik
Calcul des probabilités, Mathématiques d'assurance et statistique

Mathematisch-technische Wissenschaften und Astronomie
Mathématiques techniques et astronomie

Mechanik und Mathematische Physik
Mécanique et physique mathématique

Seite

Philosophie und Geschichte

Philosophie et Histoire

Pädagogik und Verhandlungen der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission

Pédagogie et comptes rendus des séances de la Commission Internationale de l'enseignement mathématique

AUTOREN-VERZEICHNIS

ALPHABETISCH

ALGEBRA UND ZAHLENTHEORIE

ON THE NUMBER OF SOLUTIONS OF SOME CONGRUENCES IN TWO VARIABLES AND THE RIEMANN HYPOTHESIS

By L. J. MORDELL, Manchester

Let p be a prime number and

$$f_r(x) = a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \dots + a_r,$$

where the $a's$ are integers. Let N_r denote the number of solutions in x, y of the congruence

$$y^2 \equiv f(x) \pmod{p}.$$

In a paper to appear in the Mathematische Zeitschrift, I prove the

Theorem. If $f_r(x)$ is not congruent to an algebraic square mod p, that is, if we exclude the case when

$$f(x) \equiv b(b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \dots + b_s)^2$$

identically, then

$$(1) \qquad N_r = p + O(p^{2/3}), \qquad (r = 3, 4)$$

$$= p + O(p^{7/8}), \qquad (r = 5, 6)$$

the constants implied in O being independent of the coefficients $a_0, a_1, \dots a_r$.

There are also other results for some similar congruences.

When $r = 3$ and $a_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$, a result given by Artin in the Mathematische Zeitschrift 19 (1924) 230 *suggests* that

$$(2) \qquad |N_3 - p| < 2\sqrt{p},$$

and he has actually verified this in some forty numerical cases.

The result (2) is true if and only if a certain zetafunction $Z(s)$ studied by Artin, has its nontrivial zeros on the line $R(s) = \frac{1}{2}$. The function $Z(s)$ is formed in the field $K(\sqrt{D})$ derived by the adjunction to the field K of the rational functions of $t \bmod p$ of $\sqrt{D}$ where D is a polynomial in t of degree n and is free from square factors. A zetafunction

$$Z(s) = Z(s, p, \sqrt{D})$$

exists for every prime $p \geq 3$ and every such D. Though $(1 - p^{-(s-1)}) Z(s)$ is a polynomial of degree $n - 1$ in $1/p^s$, $Z(s)$ has the usual properties associated with

the Riemann zetafunction including the famous hypothesis. The result (1) means that when $n = 3$, $Z(s)$ has no nontrivial zeros with $R(s) > \frac{2}{3} + \varepsilon$ for arbitrary $\varepsilon > 0$ and sufficiently large p, while (2) implies that the zeros are on $R(s) = \frac{1}{2}$.

My methods can be seen from a proof of a theorem of a type well known in connection with Fermat's last theorem by the work of Dickson, Hurwitz and Schur.

Theorem. If N is the number of solutions of the congruence in x, y,

$$a x^m + b y^n + c \equiv 0 \pmod{p},$$

where $abc \not\equiv 0 \mod p$, and m, n are positive integers dividing $p - 1$, (this is no loss of generality)

then $$|N - p|^2 \leqq pmn\,(m+1)\,(n+1).$$

IMAGINÄRE QUADRATISCHE ZAHLKÖRPER UND DIE NULLSTELLEN DER RIEMANNSCHEN ZETA-FUNKTION

Von MAX DEURING, Leipzig

Die Frage nach den imaginären quadratischen Zahlkörpern mit der Klassenzahl Eins ist bekanntlich mit der Frage nach der Nullstellenverteilung der diesen Körpern zugehörigen L-Reihen eng verknüpft (siehe z. B. E. Landau: Ueber die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper, Gött. Nachr. 1918, S. 285—295). Man kann diese Frage aber auch mit den Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$ in Verbindung bringen. Man kann folgendes beweisen:

Wenn es unendlich viele imaginäre quadratische Körper mit der Klassenzahl Eins gibt, so folgt daraus, daß die nichtreellen Nullstellen von $\zeta(s)$ den Realteil $1/2$ haben und einfach sind.

Jedenfalls kann also von den beiden Vermutungen: daß $\zeta(s)$ außer bei $s = -1, -2, \ldots$ bloß auf der Geraden $\sigma = 1/2$ Nullstellen hat, und: daß es bloß endlich viele imaginäre quadratische Körper mit der Klassenzahl Eins gibt, höchstens eine falsch sein.

Der Beweis beruht auf einer asymptotischen Entwicklung der Zetafunktion der Hauptklasse eines imaginären quadratischen Körpers mit der Diskriminante $-4\,d$:

$$Z_0(s) = \zeta(2s) + d^{1/2 - s}\sqrt{\pi}\,\frac{\zeta(2s-1)\,\Gamma(s - 1/2)}{\Gamma(s)} + O\left(e^{-cd^{1/2}}\,d^{1/2 - \sigma}\right),\quad c > 0$$

für große d, deren Beweis verwandt ist mit den Entwicklungen von *Mordell* zum Beweis der Kroneckerschen Grenzformel.

Diese Formel erlaubt für eine Nullstelle $1/2 + it$ von $\zeta(s)$ den Schluß, daß für einen Körper $k(\sqrt{-4d})$ mit der Klassenzahl Eins

$$\left| d^{it} - \sqrt{\pi}\,\frac{\zeta(2s-1)\,\Gamma(s-1/2)}{\zeta(s)\,\Gamma(s)} \right| < c_1\, e^{-cd^{1/2}}$$

gilt. Hieraus läßt sich eine Ungleichung der Form

$$d_{j+1} > c_3\, e^{c_2 d_{j-1}}$$

für die Folge $-4d_1, -4d_2, -4d_3, \ldots$ der Diskriminanten mit der Klassenzahl Eins gewinnen, welche das Hauptresultat der obengenannten Arbeit von E. Landau für die einklassigen Körper in gewisser Weise verschärft.

ÜBER DIE LÖSBARKEIT DER GLEICHUNG $x^2 - Dy^2 = -1$

Von TRIGVE NAGELL, Uppsala

Eine ganze positive Zahl, die als Summe von zwei teilerfremden Quadratzahlen darstellbar ist, aber keine Quadratzahl ist, wird eine *A-Zahl* genannt. Für die Lösbarkeit der Gleichung

(1) $$x^2 - Dy^2 = -1$$

in ganzen Zahlen x und y, ist dann offenbar notwendig, daß D eine A-Zahl ist. Dies ist aber nicht hinreichend, wie man aus dem Beispiele $D = 34$ ersieht; die Periode der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{34}$ hat nämlich eine gerade Anzahl von Gliedern, und folglich ist die Gleichung (1) unlösbar für $D = 34$. Eine A-Zahl D wird eine *B-Zahl* oder *C-Zahl* genannt, je nachdem die Gleichung (1) lösbar ist oder nicht. Seit *Legendre* weiß man, daß z. B. alle Primzahlen von der Form $4n + 1$ B-Zahlen sind. Hieraus folgt speziell, daß die Anzahl der B-Zahlen unterhalb x wenigstens von der Größenordnung $\frac{1}{2}\frac{x}{\log x}$ ist. Ueber die C-Zahlen wußte man bisher nichts. In diesem Vortrage wird u. a. bewiesen, daß die Anzahl der C-Zahlen $\leq x$ größer als $c\sqrt[4]{x}$ ist, wo c eine positive Konstante ist.

Algebra und Zahlentheorie

ÜBER DIE DARSTELLUNG VON ZAHLEN DURCH BINÄRFORMEN HÖHEREN GRADES

Von KURT MAHLER, Krefeld

Im Jahre 1908 zeigte Axel Thue durch ein höchst geistvolles Verfahren, das später von C. Siegel verallgemeinert wurde, daß die Anzahl $A(g)$ der Darstellungen einer ganzen rationalen Zahl g durch eine irreduzibile Binärform $F(x, y)$ vom Grad $n \geq 3$ mit ganzen rationalen Koeffizienten endlich ist. Verknüpft man die Thue-Siegelsche Methode mit der Henselschen Theorie der P-adischen Zahlen, so läßt sich ein allgemeinerer Endlichkeitssatz gewinnen, nämlich: „$F(x, y)$ ist nur für endlichviele Paare x, y ganzer rationaler Zahlen allein durch endlichviele feste Primzahlen teilbar.“ Schärfer gilt sogar: „Zu $F(x, y)$ gibt es eine nur von dieser Form abhängige Konstante c, so daß $A(g) \leq T(g)\, c^{t+1}$ ist, unter $T(g)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen, deren n-*te* Potenz in g aufgeht, unter t die Anzahl der Primzahlen, durch die g teilbar ist, verstanden.“ Eine bemerkenswerte Folgerung aus diesen Endlichkeitssätzen lautet: „Besitzt eine Binärform $G(x, y)$ ganze rationale Koeffizienten und mindestens drei verschiedene Linearfaktoren, so wächst die größte in $F(x, y)$ enthaltene Primzahl über alle Grenzen, wenn x, y ganz rational teilerfremd sind und mindestens eine von ihnen gegen Unendlich strebt.“

Der Beweis dieser Sätze gelingt durch Zurückführung auf eine Aussage über die Annäherung algebraischer Zahlen: „Bedeutet $F(x, 1)$ ein irreduzibles Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten vom Grad $n \geq 3$, $P_1, P_2, \ldots, P_t$ endlichviele verschiedene Primzahlen, ζ eine reelle, ζ_τ für $\tau = 1, 2, \ldots, t$ eine P_τ-adische Nullstelle von $f(x)$, $|\alpha|$ den gewöhnlichen Absolutbetrag, $|\alpha|_{P_\tau}$ den P_τ-adischen Wert, $\beta > \min\limits_{s=1,2,\ldots,n-1} \left(\frac{n}{s+1} + s\right)$ eine Konstante, so besitzt die Ungleichung

$$\min\left(1, \left|\frac{p}{q} - \zeta\right|\right) \prod_{\tau=1}^{t} \min\left(1, \left|\frac{p}{q} - \zeta_\tau\right|_{P_\tau}\right) \leq \max(|p|, |q|)^{-\beta}$$

höchstens endlichviele Lösungen in gekürzten Brüchen.“

Um diesen Hilfssatz abzuleiten, stellt man nach dem Verfahren von Thue und Siegel Identitäten der Form

$$R(x,y) = (x - z)^r F(x,y,z) + (y - z)\, G(x,y,z) + F(x, 1)\, X(x,y,z)$$

auf, wo R, F, G, H Polynome mit kleinen ganzen rationalen Koeffizienten und r eine große natürliche Zahl ist. Identifiziert man dann x und y mit zwei Brüchen $\frac{p_1}{q_1}$ und

$\frac{p_2}{q_2}$, z der Reihe nach mit den Nullstellen $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_\tau$, so zeigt sich, daß die beiden Produkte

$$\min\left(1, \left|\frac{p_1}{q_1} - \zeta\right|\right) \prod_{\tau=1}^{t} \min\left(1, \left|\frac{p_1}{q_1} - \zeta_\tau\right|_{P_\tau}\right) \text{ und } \min\left(1, \left|\frac{p_2}{q_2} - \zeta\right|\right) \prod_{\tau=1}^{t} \min\left(1, \left|\frac{p_2}{q_2} - \zeta_\tau\right|_{P_\tau}\right)$$

nicht gleichzeitig klein sein können.

SUR LES SYSTÈMES CYCLIQUES DE TRIPLES DE STEINER DIFFÉRENTS POUR N PREMIER DE LA FORME 6n + 1

Par S. BAYS et G. BELHÔTE, Fribourg

Dans le Chap. IV d'un mémoire récent[1]) sur les systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour N premier (ou puissance de nombre premier) de la forme $6n+1$, j'ai montré comment on peut obtenir les systèmes de caractéristiques *différents* appartenant à chaque diviseur d de $3n$, dans les 4 cas suivants qui épuisent toutes les possibilités :

1. d est premier à n ($d = 1$ et 3) ;
2. d est diviseur de n, $< n$ et > 3 ;
3. n est diviseur de d ($d = n$ et $3n$) ;
4. d et n ont un p.g.c.d. $\delta > 1, < d$ et n.

Les systèmes de caractéristiques différents étant obtenus, il restait la question suivante : déterminer *le nombre* et *la nature* des systèmes cycliques de triples *différents* déterminés par chacun de ces systèmes de caractéristiques.

Soit Σ un système de caractéristiques, S un système de triples déterminé par Σ. Si $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^{\omega} x|\}$ est le diviseur du groupe métacyclique, d'ordre le plus élevé que possède S, nous dirons que S est de *la classe* ω.

Soit $\frac{3n}{d} = 2^a . n_1$, n_1 impair. Soit $\mu'_1 = 1, \mu'_2, \mu'_3, \ldots, \mu'_k = n_1$ l'ensemble des diviseurs de n_1. Si Σ appartient à d, les valeurs possibles de ω sont $\omega_i = 2\mu_i d = 2^{a+1} \mu'_i d$, $i = 1, 2 \ldots, k$, $\mu_i = 2^a \mu'_i$. Si S est de la classe ω_i, $2\mu_i$ systèmes de triples déterminés par Σ sont équivalents à S (S inclus). Pour $d = 1$, $\frac{3n}{d} = 3n = 2^a . n_1$ est à rem-

[1]) Commentarii Math. Helvetici, vol. 2, fasc. IV et vol. 3, fasc. I, II et IV.

placer par $n = 2^a. n'_1$, n'_1 impair, et la suite des diviseurs μ'_i de n_1, par celle plus courte des diviseurs de n_1': $\mu_1' = 1$, μ_2', μ_3', ... , $\mu'_{k'} = n_1'$.

Soit x_i le nombre des systèmes S différents de la classe ω_i. Grâce à une idée heureuse de l'un de mes élèves, nous sommes maintenant en état de donner aisément, quel que soit le système de caractéristiques Σ dans chacun des 4 cas ci-dessus, le nombre x_i pour chaque classe ω_i.

ω_i est diviseur de $6n$; il peut être diviseur de $2n$. M étant le nombre des systèmes S déterminés par Σ, d'une classe $\omega_{i'}$, $\omega_{i'} < \omega_i$ et diviseur de ω_i possédant donc un diviseur métacyclique d'ordre plus élevé que celui de $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^{\omega_i} x|\}$: *si ω_i est diviseur de $2n$*, on a :

$$x_i = \frac{2^{\frac{\omega_i}{6} + \frac{\omega_i n'}{3n}} - M}{2\mu_i} \qquad (1)$$

n' étant le nombre des caractéristiques principales de Σ ; *si ω_i n'est pas diviseur de $2n$*, on a simplement :

$$x_i = \frac{2^{\frac{\omega_i}{6}} - M}{2\mu_i} \qquad (2)$$

Le nombre des systèmes S de la classe ω_i est $2\mu_i x_i$. Dans cette formule (1) ou (2), M est donc à remplacer par $\sum_{i'} 2\mu_{i'} x_{i'}$, où i' parcourt ceux des indices 1, 2, . . ., k, pour lesquels $\omega_{i'} < \omega_i$ est diviseur de ω_i. On obtient ainsi de proche en proche chacun des x_i au moyen des précédents.

ON SATURATED NUMBERS

By H. RAFAEL, Bombay

Calling *saturated* numbers of order k the integers for which

$$T_k = \frac{\alpha + k}{k} \cdot \frac{\beta + k}{k} \cdots\cdots \frac{\lambda + k}{k}$$

is a maximum, the number being $N = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \ldots p^\lambda$ series of saturated numbers of different orders may be constructed. The investigations of late Prof. Cesàro on the m. c. m. of the numbers 1, 2, 3, ... n are closely connected with these numbers.

The main theorem for their actual construction is that any saturated number of order k, $S_k(m_k)$ is equal to a saturated number of order $k+1$, $S_{k+1}(m_{k+1})$, multiplied by $P(p_k)$, where $P(p_k)$ stands for the product of the prime numbers from 2 to p_k ($P(p_k) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots p_k$). The investigation of the lower and upper limits for p_k, in order to avoid trials, is the most definite part of the present paper.

Let $S_{k+1}(m_{k+1})$ be a saturated number of order $k+1$ and $T_{k+1}(m_{k+1})$ be its corresponding factorial index of order $k+1$. If we consider the number $\frac{k}{k+1} T_{k+1}(m_{k+1})$ obtained multiplying $T_{k+1}(m_{k+1})$ by k and dividing by $k+1$, either this number is the factorial index of order $k+1$ of a saturated number of order $k+1$, $S_{k+1}(m'_{k+1})$ or it lies between two consecutive factorial indices of order $k+1$ of two saturated numbers of the same order. If $\frac{k}{k+1} T_{k+1}(m_{k+1}) = T_{k+1}(m'_{k+1})$ then, if p'_k is the prime number immediately preceeding the quotient (not necessarily an integer) $h = \frac{S_{k+1}(m_{k+1})}{S_{k+1}(m'_{k+1})}$, i.e. $p'_k < h$, but there is no prime number between p'_k and h, then p'_k is a lower limit i.e. $S_{k+1}(m_{k+1}) \cdot P(p_k)$ cannot be a saturated number of order k, if $p_k < p'_k$.

If the number $\frac{k}{k+1} T_{k+1}(m_{k+1})$ is not an exact factorial index of order $k+1$ of a saturated number of this order, then it lies between two consecutive factorial indices of two consecutive saturated numbers of this order. Therefore $T_{k+1}(m'_{k+1} - 1) < T_{k+1}(m_{k+1}) \frac{k}{k+1} < T_{k+1}(m'_{k+1})$; then if p'_k is the prime number immediately preceeding the quotient, integer or fractional $h = \frac{S_{k+1}(m_{k+1})}{S_{k+1}(m'_{k+1})}$ i. e. $p'_k < h$, but there is no prime number between p'_k and h, then p'_k is a lower limit, i. e. $S_{k+1}(m_{k+1}) P(p_k)$ cannot be a saturated number of order k if $p_k < p'_k$.

The reasoning in order to determine the upper limit is the same. If $\frac{k+1}{k} T_{k+1}(m_{k+1})$ is the exact factorial index of order $k+1$ of a saturated number $S_{k+1}(m''_{k+1})$ of the same order, then if $h = \frac{S_{k+1}(m''_{k+1})}{S_{k+1}(m_{k+1})}$, $S_{k+1}(m_{k+1}) P(p_k)$ cannot be a saturated number of order k if $p_k > h$; if $\frac{k+1}{k} T_{k+1}(m_{k+1})$ is not exactely the factorial index of order $k+1$ of a saturated number of the same order, but it lies between two consecutive indices of order $k+1$ of two consecutive saturated numbers of the

same order, i. e. that we have $T_{k+1}(m''_{k+1} - 1) < \frac{k+1}{k} T_{k+1}(m_{k+1}) < T_{k+1}(m''_{k+1})$ then if $h = \frac{S_{k+1}(m''_{k+1})}{S_{k+1}(m_{k+1})}$, $S_{k+1}(m_{k+1}) P(p_k)$ cannot be a saturated number of order k if $p_k > h$. The proof is the same as for the lower limit, i. e. by comparison.

An easy method which allows the indefinite calculation of these series without hesitation is also explained and results are shown.

The asymptotic properties of these series, very complicated and difficult to prove rigorously, are the subject of the analysis of the second part of the paper. The series S_1 or the series of numbers with a maximum number of divisors is the most interesting of the series of saturated numbers but its investigation and study are laborious. Any number of this series is of the form $P(p_1), P(p_2), P(p_3) \ldots .,$ where p_1, when it is very large, differs very little from p_2. p_3. and approximately $\frac{\log p_1}{\log 2} = \frac{\log p_2}{\log \frac{3}{2}} = \frac{\log p_3}{\log \frac{4}{3}}$. Other properties related to the frequency of these numbers are also shown.

DISKRIMINANTE EINER QUADRATISCHEN FORM

Von H. BRANDT, Halle-Saale

Es werden quadratische Formen beliebiger Ordnung mit rationalen Koeffizienten betrachtet. Für die Form $f = f(x_1 x_2 \ldots x_n)$ wird bei geradem $n = 2\nu$ der Ausdruck $\Delta = (-1)^\nu \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right|$ und bei ungeradem $n = 2\nu + 1$ der Ausdruck $\Delta = (-1)^\nu \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right|$ als *Diskriminante* bezeichnet.

Sind die Koeffizienten von f ganzzahlig, so enthält Δ alle, und nur die Primzahlen, für welche der Rang von f kleiner als n ist, und das Vorzeichen ist so gewählt, daß für Primzahlen p, welche nicht in Δ aufgehen, das Legendresche Symbol $\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ das Verhalten der Form in bezug auf p (und Potenzen von p) vollständig bestimmt.

Betrachtet man eine Gesamtheit von Formen, welche aus einer beliebigen von ihnen dadurch entsteht, daß man alle rationalen umkehrbaren linearen Transforma-

tionen ausübt und die erhaltenen Formen noch mit beliebigen rationalen Faktoren multipliziert, so lassen sich darunter diejenigen Formen auszeichnen, welche ganzzahlige Koeffizienten und eine, absolut genommen, möglichst kleine Diskriminante (und nicht negative Signatur) haben. Sie heißen *Stammformen,* und ihre Diskriminante heißt *Stammdiskriminante* für jede Form der Gesamtheit.

Die Stammdiskriminante Δ_0 enthält bei ungerader Ordnung nur einfache Primfaktoren, bei gerader Ordnung können ungerade Primfaktoren höchstens im Quadrat auftreten, während die Primzahl 2 wie bei binären Formen entweder nicht oder in der zweiten oder dritten Potenz vorkommt.

Eine Form f heißt für die Primzahl p vollständig zerlegbar, wenn für jede Potenz p^t eine Kongruenz

$$f \equiv l_1 l_2 + l_3 l_4 + \dots + l_{2\nu-1} l_{2\nu} + (k l_{2\nu+1}^2), \quad (p^t)$$

möglich ist, wo die l_i Linearformen sind und das eingeklammerte Glied bei geradem $n = 2\nu$ fehlt.

Bei ungerader Ordnung ist Δ_0 bis auf das Vorzeichen das Produkt der Primzahlen, für welche f nicht vollständig zerlegbar ist.

Bei gerader Ordnung ist die Form vollständig zerlegbar für alle und nur die Primzahlen p, für die $\left(\frac{\Delta_0}{p}\right) = 1$, und umgekehrt ist dadurch Δ_0 bestimmt, wenn nur ein gemäß dieser Forderung auftretender einfacher Primfaktor 2 durch 8 ersetzt wird.

Aehnliche Betrachtungen können für quadratische Formen in algebraischen Zahlkörpern angestellt werden. Nur gibt es hier im allgemeinen keine Stammformen, und die Stammdiskriminante wird ein Ideal. Ihre Bedeutung ist bei ungerader Ordnung entsprechend, während bei gerader Ordnung die Klassifikation der Primideale nicht durch die Stammdiskriminante direkt, sondern durch irgend eine Form und ihre Diskriminante für fast alle Primideale bewirkt wird, und diese Form kann so ausgewählt werden, daß irgendwelche vorgegebene Primideale nicht zu den Ausnahmen gehören.

FÖRDERUNG DER UNTERSUCHUNGEN DES HERRN FUETER ÜBER MODULARGLEICHUNGEN UND KOMPLEXE MULTIPLIKATION DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN

Von L. KIEPERT, Hannover

Durch das zweibändige Werk: „Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen" hat sich Herr *Fueter* ein großes Verdienst erworben schon dadurch, daß er die *Weierstraß*sche $\wp$-Funktion der Vergessenheit entrissen hat. Die vielen Sätze, die er dabei herleitet, sind bahnbrechend und von großem wissenschaftlichem Interesse. Bei der Aufgabe, die numerische Berechnung der Modulargleichungen auszuführen, ist er auf besondere Schwierigkeiten gestoßen, die ich in weitem Umfange beseitigen kann.

Unter Benutzung der *Weierstraß*schen Bezeichnungen kann ich hier das Folgende mitteilen:

Bei den Modulargleichungen liegt es am nächsten, eine Beziehung zwischen der absoluten Invariante $I = \frac{g_2^3}{\Delta}$ der ursprünglichen Funktion und der absoluten Invariante $\overline{I}$ der transformierten Funktion aufzusuchen. Dabei werden aber die Zahlkoeffizienten so groß, daß die Berechnung unüberwindliche Schwierigkeiten bietet. Schon bei dem einfachsten Falle $n = 2$ treten 14stellige Zahlen auf.

Deshalb habe ich eine Hilfsgröße

$$L(n) = \left[\frac{\Delta\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{\Delta(\omega, \omega')}\right]^{\frac{1}{24}}$$

eingeführt, bei deren Benutzung die Rechnungen *wesentlich* einfacher werden.

Ist n eine von 2 und 3 verschiedene Primzahl, so ist L^2 die Wurzel einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Koeffizienten sehr einfache ganze rationale Funktionen von

$$\gamma_2 = \frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}} \text{ und } \gamma_3 = \frac{g_3}{\sqrt{\Delta}}$$

sind. Für $n = 2$ und für $n = 3$ wird

$$L^{24} - 12\gamma_2 L^8 + 16 = 0$$

und

$$L^{24} + 18 L^{12} + 216\gamma_3 L^6 - 27 = 0.$$

Für $n = 5$ wird

$$L^{12} + 10 L^6 - 12\gamma_2 L^2 + 5 = 0,$$

eine Gleichung, die mich auf die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades mit Hilfe der elliptischen Funktionen führte. (*Crelle*s *Journal,* Bd. 87.)

Ist $n = a^2$ das Quadrat einer von 2 und 3 verschiedenen Primzahl, so genügt schon L selbst einer solchen Gleichung vom Grade $a\,(a+1)$.

Dadurch gelang es mir, die Modulargleichungen für

$$n = 5, 25, 7, 49, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$$

vollständig herzuleiten.

Auch in dem Falle, wo n eine beliebig zusammengesetzte Zahl ist, leistet die Hilfsgröße L sehr gute Dienste, so daß ich die Transformation noch für 18 weitere Fälle durchführen konnte.

Besitzt man die erforderlichen Transformationsgleichungen, so ergibt sich die Berechnung der singulären Invarianten, bei denen komplexe Multiplikation stattfindet, mühelos, was ich im 39. Bande der Math. Annalen durch 42 Beispiele gezeigt habe. Die Anzahl dieser Beispiele hätte ich noch leicht vermehren können, wenn ich die vorhandenen, von mir aufgestellten Vorbereitungen voll ausgenutzt hätte. Ja, man kann sogar mit Hilfe der singulären Invarianten die Berechnung der Transformationsgleichungen für größere Werte von n wesentlich erleichtern.

(Vergl. *Crelle*s *Journal,* Bd. 76, 87, 88, 95 und *Math. Annalen,* Bd. 26, 32, 37.)

ÜBER DIE SCHLÄFLISCHEN MODULARGLEICHUNGEN

Von G. N. WATSON, Birmingham

Die von Schläfli eingeführten Modulargleichungen, deren Transformationsgrad eine Primzahl ist (3, 5, 7, ... bis auf 37 und auch 47), sind von Schläfli, Weber und Berry ausgearbeitet worden. Ich habe einige Schläflische Modulargleichungen ausgearbeitet, deren Transformationsgrad eine zusammengesetzte Zahl (ein Quadrat) ist, teils durch algebraische Methoden (Elimination aus zwei Modulargleichungen für einen Primzahlgrad), teils mit dem Gebrauche von q-Reihen und q-Produkten. Die Schläflische Modulargleichung für den 9. Transformationsgrad ist ganz einfach, aber die Modulargleichung für den 25. Transformationsgrad auszuarbeiten ist ziemlich langwierig, und die Modulargleichung für den 49. Transformationsgrad ist sehr kompliziert. Diese Modulargleichungen sind sehr nützlich beim Konstruieren gewisser singulärer Moduln.

ÜBER DIE PRIMIDEALZERLEGUNG IN GEWISSEN RELATIV-IKOSAEDRISCHEN ZAHLKÖRPERN

Von MAX GUT, Zürich

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper und K ein in bezug auf k relativ-Galois'scher Körper. Die Relativgruppe sei die Ikosaedergruppe, so daß der Relativgrad 60 ist. Ist dann $\mathfrak{p}$ ein Primideal von k, so fragen wir nach seiner Zerlegung in K:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{E_1} \mathfrak{P}_2^{E_2} \ldots \mathfrak{P}_r^{E_r}, \quad N_K^k(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{p}^{F_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots r,$$

also nach der Anzahl r der voneinander verschiedenen Primteiler $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{p}$, nach ihren Relativordnungen E_i und nach ihren Relativgraden F_i.

Enthält k den Körper der 5. Einheitswurzeln und eventuell noch eine gewisse Quadratwurzel, so kann man in K immer eine relativ-bestimmende Zahl Ξ so finden, daß ihre Relativgleichung in bezug auf k von der Form

$$(*) \quad -[-\Xi^{20} - 1 + 228(\Xi^{15} - \Xi^5) - 494\Xi^{10}] + 2^6 3^3 \frac{\zeta}{\nu} [\Xi(\Xi^{10} + 11\Xi^5 - 1)]^5 = 0$$

ist, wobei ζ und ν ganze Zahlen von k sind, deren Quotient $\frac{\zeta}{\nu}$ durch Ξ eindeutig bestimmt ist. Unter Heranziehung geeigneter Resolventen dieser Gleichung, der Hilbert-Dedekind'schen Sätze über die Primidealzerlegung in den relativ-Galois'schen Körpern und in ihren Unterkörpern und der Ore'schen Sätze über die Primidealzerlegung auf Grund einer relativ-definierenden Körpergleichung kann man die oben gestellte Frage beantworten. Für den Fall, daß $\mathfrak{p}$ zu 2, 3, 5 und zur Relativdiskriminanten von K in bezug auf k [aber nicht notwendigerweise zur Diskriminanten der Gleichung (*)] teilerfremd ist, sind die Resultate angegeben in meiner Arbeit, die unter dem gleichen Titel erschienen ist in den Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 4, pag. 219, 1932.

SUR LA FACTORISATION DES TERMES DES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES DU DEUXIÈME ORDRE

Par L.-GUSTAVE DU PASQUIER, Neuchâtel, Suisse

Le problème de la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques d'ordre supérieur

$$(1) \qquad P(x) \equiv a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots\ldots + a_r$$

où les a_λ sont fixes, tandis que x parcourt la série des nombres entiers, a été attaqué par trois voies bien différentes. La première conduit à supposer que les termes $P(n)$ d'une telle progression sont préalablement décomposés chacun en ses facteurs premiers p_λ rangés par ordre de grandeur croissante:

$$(2) \qquad P(n) = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots\ldots p_\lambda^{e_\lambda} \cdot \ldots \cdot p_s^{e_s}$$

puis à étudier les facteurs premiers p_λ qui apparaissent de cette façon. — La deuxième voie conduit à établir une formule donnant $\pi\,(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r;\, z)$, c'est à dire donnant le nombre des nombres premiers $\leqq z$ contenus dans (1), quand x parcourt la suite naturelle des nombres entiers. — La troisième voie conduit à étudier tout ce problème en prenant comme point de départ, au lieu du corps R des nombres rationnels, un autre corps de nombres.

Pour les progressions arithmétiques ordinaires ($r = 1$), on sait que

$$(3) \qquad \pi\,(a_0, a_1;\, x) \approx \mathrm{li}\, x \,/\, \varphi\,(a_0).$$

Mais quand $r > 1$, on sait seulement: que, dans (2), $\lim p_s = \infty$ quand $n \rightarrow \infty$; que $\pi\,(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r;\, z)$ est au plus de l'ordre de grandeur de $z \,/\, \ln z$; et que dans toute progression arithmétique du second ordre ($r = 2$), on a $s \leqq 3$ infiniment souvent dans (2), quand $n \rightarrow \infty$ par la suite des nombres naturels. Dans l'état actuel de la science arithnomique, il n'est pas sans intérêt de vérifier la formule

$$(4) \qquad \pi\,(a_0, a_1, a_2;\, z) \approx \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_0}} \cdot C \cdot \prod_{\omega'} \frac{\omega'}{\omega' - 1} \cdot \mathrm{li}\sqrt{z}$$

que les travaux de messieurs Hardy et Littlewood m'ont suggérée*), mais qui n'est pas encore démontrée rigoureusement. Dans cette formule, $\varepsilon = 1$ si $a_0 + a_1$ est impair, $\varepsilon = 2$ si $a_0 + a_1$ est pair; ω' parcourt les nombres premiers impairs qui

*) Partitio numerorum, 3ième mémoire; Acta mathematica t. 44, p. 1—70, Djursholm 1923.

sont diviseurs communs de a_0 et de a_1; par hypothèse, le discriminant $\varDelta \equiv a_1^2 - 4a_0a_2$ n'est pas carré parfait; a_0, a_1 et a_2 sont premiers entre eux dans leur ensemble; si a_0 et a_1 sont tous les deux impairs, a_2 l'est aussi; enfin,

$$C \equiv \prod_{p \geqq 3}^{p=\infty}{}' \left\{ 1 - \frac{1}{p-1} \cdot \left(\frac{\varDelta}{p}\right) \right\}$$

où p parcourt les nombres premiers impairs qui ne sont pas diviseurs de a_0 et le symbole de Legendre $\left(\frac{\varDelta}{p}\right) = \pm 1$, suivant que $\varDelta$ est résidu ou nonrésidu quadratique de p. Vu le rôle prépondérant joué par le premier coefficient, a_0, j'ai vérifié (4) pour six progressions appropriées

(5) $$f(x) \equiv a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

en poussant la factorisation jusqu'à 225 millions**), grâce à une méthode développée par monsieur A. Gérardin. Cette méthode consiste à „toucher", dans (5), tous les termes composés; les termes non touchés sont alors automatiquement des nombres premiers et les autres termes se trouvent décomposés en leurs facteurs premiers. A cet effet, connaissant les nombres premiers p qui sont facteurs possibles de (5), on adjoint à chaque facteur p deux «racines», r et s; pour $x = pn + r$ et $x = pn + s$, le $f(x)$ correspondant est alors divisible par p, quand n parcourt la suite des nombres naturels jusqu'à la limite voulue. Il suffit d'écrire, dans un cahier à 3 colonnes, le facteur p à côté du $f(x)$ correspondant.

Exemple: $$f(x) \equiv 101\,x^2 + 20x + 1$$

x	f(x)	facteurs premiers
......	....	....
......	....	....
1 485	222·757 426	2 × 17 × 6·551 689
1 486	223·057 517	
1 487	223·357 810	2 × 5 × 13 × 1·718 137
......	....	....
1 542	240·185 005	5 × 48·037 001
......	....	....
......	....	....

**) L.-GUSTAVE Du PASQUIER: «Sur les nombres premiers dans les progressions arithm. du deuxième ordre». Associat. française pour l'avancement des sciences, Compte rendu du Congrès de Lyon, 1926.

Cette méthode est particulièrement importante par le fait suivant: les «racines» r et s calculées pour une progression quadratique (5) sont «racines» pour une infinité d'autres progressions quadratiques qui s'en déduisent aisément et que l'on peut ainsi factoriser presque mécaniquement. Ayant les racines r et s pour tous les $p < 32000$, j'ai pu factoriser de cette façon, en peu de mois, des progressions du deuxième ordre jusque bien au delà d'un milliard: $a_0 \cdot 10^{10}$, et déterminer un grand nombre de nombres premiers inédits de 8 à 12 chiffres. L'arithmétique, comme toutes les sciences, résulte de l'observation et progresse par l'étude des phénomènes numériques.

ON A PROBLEM IN THE ADDITIVE THEORY OF NUMBERS

By E. H. LINFOOT, Bristol

Let $\nu_s(n)$ be the number of representations of the positive integer n as the sum of s quadratfrei numbers [1]), repetitions being allowed and order being regarded as relevant. The problem of finding an asymptotic formula for $\nu_s(n)$ has been discussed by C. J. A. Evelyn and the writer in a series of papers. They have shown by elementary methods that the number of representations

$$(1) \qquad \nu_s(n) = \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} \frac{1}{\zeta^s(2)} S(n) + O(n^{s-4/3+\varepsilon}).$$

as $n \to \infty$, for every $\varepsilon > 0$. Here

$$S(n) = \prod_{p^2 | n} \left(1 + \frac{(-1)^{s+1}}{(p^2-1)^s}\right) \prod_{p^2 \nmid n} \left(1 + \frac{(-1)^s}{(p^2-1)^{s-1}}\right)$$

lies between two positive absolute constants. By an application of the analytic method of Hardy and Littlewood they obtained the error term $O(n^{s-\frac{3}{2}+\frac{1}{2(s-1)}+\varepsilon})$. Using Gelbcke's refinement of the Winogradoff method, recently developed by him in connection with Waring's problem, they are now able to sharpen the error term to $O(n^{s-\frac{3}{2}+\frac{1}{2s}+\varepsilon})$. This is an improvement on (1) when $s \geqq 4$.

References.

T. Esterman, Journal London Math. Soc. 6 (1931) 37-40,
C. J. A. Evelyn and E. H. Linfoot, Oxford Journal of Math., June 1932,
M. Gelbcke, Math. Annalen 105 (1931) 637-52.

---

1) A quadratfrei number is one not divisible by a square greater than 1.

Algebra und Zahlentheorie

STRUKTURTHEORIE DER HALBEINFACHEN ALGEBREN ÜBER ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPERN

Von H. HASSE, Marburg-Lahn

Die Struktur der halbeinfachen Algebren (h. A.) über beliebigem Grundkörper ist von *Wedderburn* durch zwei Sätze weitgehend aufgeklärt worden:

1. Jede h. A. ist eindeutig (bis auf die Reihenfolge) als direkte Summe einfacher Algebren (e. A.) darstellbar (und umgekehrt).

2. Jede e. A. ist eindeutig (bis auf innere Automorphismen) als volles Matrizensystem über einer Divisionsalgebra (D. A.) darstellbar (und umgekehrt).

Durch diese Wedderburnschen Sätze wird das allg. Strukturproblem auf die Untersuchung der D. A. reduziert.

Dies Problem gehört zu den wichtigsten der modernen Algebra. Für die Grade 2, 3, 4 wurde seine Lösung durch *Dickson, Wedderburn, Albert* gegeben. *Dickson* führte auch zuerst denjenigen Typ von D. A. ein, der für die allg. Lösung dieses Problems von besonderer Wichtigkeit ist, die zyklischen Algebren (z. A.).

Für den Fall, daß der Grundkörper ein algebr. Zahlkörper ist, ist die Lösung des Problems im letzten Jahr gelungen. Den zwei Wedderburnschen Sätzen tritt dann zur Seite der Satz:

3. Jede D. A. über einem algebr. Zahlkörper ist als z. A. (über ihrem Zentrum) darstellbar.

Der Beweis ergibt sich durch Kombination der von *Hensel* geschaffenen arithm. Methoden, die ich im Anschluß an *Speiser* in diese Theorie hereingetragen habe, mit gewissen algebr. Methoden, die, auf früheren Untersuchungen von *Speiser* und *I. Schur* fußend, kürzlich von *R. Brauer* und *E. Noether* entwickelt wurden.

Die Darstellung als z. A. ist zwar nicht eindeutig, aber die arithm. Theorie liefert in Gestalt von Normenrestsymbolen ein volles Invariantensystem der z. A., so daß also durch Satz 3 das restliche Problem für den Fall eines algebr. Grundkörpers völlig gelöst wird.

Für den Fall eines allg. Grundkörpers sind die Untersuchungen über das entspr. Strukturproblem gegenwärtig im Gange.

Aus Satz 3 ergeben sich eine Reihe von wichtigen Folgerungen, die ich hier nur andeuten kann.

Zunächst konnte ich mit seiner Hilfe eine berühmte Frage von *I. Schur* beantworten: Die irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe der Ordnung n sind stets im Körper der n^h-ten Einheitswurzeln mit hinreichend hohem h möglich.

Ferner erweist sich in Untersuchungen von *Chevalley* und mir die Theorie der z. A. als das adäquate Werkzeug zum Aufbau der Klassenkörpertheorie im Kleinen. Mittels Satz 3 konnte ich dann weiter den Uebergang zur Klassenkörpertheorie im Großen für den Isomorphiesatz und das Artinsche Rez. Ges. in eleganter Weise vollziehen.

Schließlich erweist sich in Untersuchungen von *Artin, E. Noether* und mir Satz 3 (und überhaupt diese Methode) als kräftiges Hilfsmittel bei der Behandlung der großen im Mittelpunkt der modernen Zahlentheorie stehenden Frage nach dem Zerlegungsgesetz in allg. galoisschen Zahlkörpern.

THEORY OF NON-COMMUTATIVE POLYNOMIALS

By OYSTEIN ORE, New Haven

The present paper contains some of the main properties of polynomials

(1) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + , \dots + a_n$$

with coefficients a_i in a non-commutative field K. The sum of two polynomials (1) is defined as the polynomial obtained by adding corresponding coefficients. For the definition of the product there exists various possibilities. In non-commutative algebras one usually considers the case, where the variable x is permutable with the coefficients; a wider domain of applications is obtained however, if one only postulates that the degree of the product is always equal to the sum of the degrees of the factors. The theory then also includes for instance the formal theory of linear differential and difference equations and also of other functional equations.

Under this assumption one must have for a linear product

2) $$xa = \bar{a}x + a'$$

where a is an arbitrary element in K; from (2) the general product of polynomials (1) can be defined. For the two fundamental operations, the *conjugation* $\bar{a}$ and the *differentiation* a' one derives the rules

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}, \ \overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$(a+b)' = a' + b', \ (ab)' = \bar{a}b' + a'b.$$

The first represents a homomorphismus in K, in the commutative case the second obeys rules corresponding to ordinary differentiation.

A right-hand Euclid algorithm always exists for two polynomials; a left-hand algorithm exists only when the conjugation satisfies a certain condition. From the right-hand algorithm the existence of a right-hand greatest common divisor and least common multiplum follows.

The notion of the transform $gf(x)g^{-1}$ of a polynomial $f(x)$ by another $g(x)$ is then introduced; it contains f. inst. the notion of similarity introduced for linear differential expressions by Poincaré. Among the various properties of the transform I shall only mention the following: When a product $a(x)b(x)$ is divisible by $c(x)$, and $b(x)$ relatively prime to $c(x)$ then $a(x)$ is divisible by $bc(x)b^{-1}$.

The notion of transforms is particularly useful in the formulation and proof of the various theorems on the representation of non-commutative polynomials, which form the principal object of this paper. Four main representations are considered: The first is the representation as a product of prime factors; the second is the representation as a product of reducible factors, both corresponding to theorems of Loewy in the special case of linear differential equations. The third representation includes as a special case the representation studied by Krull for differential polynomials, while the proofs are considerably simpler. The fourth representation is new. I finally observe that this general theory has been carried further than the special theory of representation for differential- and difference equations, so that various new results can be derived also for these cases.

IDEAL- UND BEWERTUNGSBEGRIFF IN DER ARITHMETIK DER KOMMUTATIVEN INTEGRITÄTSBEREICHE

Von W. KRULL, Erlangen

Im Ring der ganzen rationalen Zahlen liefert die Primfaktorzerlegung das Teilbarkeitsgesetz für die Elemente. In den Hauptordnungen der endlichen algebraischen Zahlkörper, in denen für die Elemente *i. a* keine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren mehr besteht, hat das Teilbarkeitsproblem vor allem zwei klassische Lösungen gefunden. *Dedekind* führt neben den Elementen die Ideale ein, und erreicht durch geeignete Definition des Ideals und der Idealmultiplikation, daß wenigstens jedes Ideal eindeutig in endlich viele Primidealfaktoren zerlegt werden kann. *Hensel* trennt die Primstellen durch Einführung der p-adischen und π-adischen Zahlen und vermeidet so den Idealbegriff. Arbeitet man mit dem Begriff der Bewertung, und

zwar insbesondere mit dem der Exponentenbewertung, so kann man das Henselsche Ergebnis folgendermaßen aussprechen: Jeder Primstelle des betrachteten Zahlkörpers entspricht eine charakteristische ganzzahlige (diskrete) Bewertung, und es ist das Körperelement a dann und nur dann durch das Element b teilbar, wenn a in allen Bewertungen mindestens den gleichen Wert besitzt wie b. Der Tatsache, daß bei Dedekind jedes Ideal nur endlich viel Primidealteiler besitzt, entspricht bei Hensel der Umstand, daß jedes Körperelement nur in endlich vielen Bewertungen einen von Null verschiedenen Wert hat. —

Bei der Entwicklung einer Arithmetik allgemeiner kommutativer Integritätsbereiche kann man sich sowohl nach dem Dedekindschen als nach dem Henselschen Vorbild richten. Im einen Fall wird man versuchen, die Definition der Ideale und der Idealmultiplikation so abzuändern, daß unter möglichst schwachen Voraussetzungen die Zerlegbarkeit der ganzen Ideale in Primfaktoren erhalten bleibt, oder wenigstens noch der Satz gilt, daß die Gesamtheit aller ganzen und gebrochenen Ideale eine multiplikative Gruppe bildet. Im andern Fall muß man bestrebt sein, den Bewertungsbegriff so zu verallgemeinern, daß auf möglichst viele Integritätsbereiche das oben angegebene Henselsche Teilbarkeitskriterium übertragen werden kann, eventuell unter Verzicht auf die im endlichen algebraischen Spezialfall erfüllte Endlichkeitsbedingung. —

Beide Methoden sind brauchbar, beide haben bereits zu manchen abschließenden Resultaten geführt. Im einzelnen decken sich die Ergebnisse aber keineswegs völlig, sie ergänzen sich viel mehr gegenseitig. Eine genauere Untersuchung dieser Dinge, wie sie im Vortrag skizziert werden soll, führt nicht nur auf bemerkenswerte Zusammenhänge zwischen bereits bekannten Sätzen, sondern vor allem auch auf neuartige Ergebnisse und Fragestellungen.

ELEMENTARE SÄTZE ÜBER DIE NULLSTELLEN DER ABLEITUNGEN EINES POLYNOMS IN BEZUG AUF EINEN PUNKT

Von LUDWIG BERWALD, Prag

Unter der ersten Ableitung $f_1(z, \alpha)$ eines Polynoms $f(z)$ vom Grade n in Bezug auf einen Punkt α versteht man die gewöhnliche Ableitung $f'(z)$, wenn $\alpha = \infty$ und

$$f_1(z, \alpha) = n f(z) - (z - \alpha) f'(z),$$

wenn α endlich ist. $f_1(z, \alpha)$ ist ein Polynom vom Grade $n-1$. Die $(k+1)^{te}$ Ableitung $f_{k+1}(z, \alpha)$ von $f(z)$ in Bezug auf den Punkt α $(k \geqq 1)$ ist als die erste Ableitung der k^{ten} Ableitung $f_k(z, \alpha)$ erklärt, wobei beide Ableitungen in Bezug auf den Punkt α zu nehmen sind. Es werden eine Reihe von Sätzen über die Lage der Nullstellen der gewöhnlichen Ableitungen eines Polynoms und linearer Kombinationen des Polynoms und seiner Ableitungen auf die Ableitungen eines Polynoms in Bezug auf einen endlichen Punkt verallgemeinert.

QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

Par P. SERGESCU, Cluj

1. M. *E. van Vleck* (Bull. Soc. Math. France 1925, p. 112) et M. *Biernacki* (Thèse, 1926, p. 16) ont donné des démonstrations du théorème suivant, dû à M. *P. Montel* (An. Ec. Norm. 1923, p. 16): *L'équation sans lacunes*

$$(1) \qquad 1 + x^p + a_{p+1} x^{p+1} + a_{p+2} x^{p+2} + \ldots + a_n x^n = 0$$

a au moins p racines de modules inférieurs à $\sqrt[p]{C_n^p}$.

En voici une démonstration analogue à celle de M. *van Vleck*.

Si n quantités y vérifient les relations:

$$\Sigma y_1 = 0 \quad \Sigma y_1 y_2 = 0 \ldots \quad \Sigma y_1 \ldots y_{p-1} = 0 \quad \Sigma y_1 \ldots y_p = (-1)^p A$$

et si on en fait deux groupes quelconques $u_1, \ldots u_q$ et $v_1, \ldots v_{n-q}$, on a:

$$(2)\ \Sigma u_1 = (-1)\, \varphi_1(v) \ldots \Sigma u_1 \ldots u_{p-1} = (-1)^{p-1} \varphi_{p-1}(v) \quad \Sigma u_1 \ldots u_p = (-1)^p [A + \varphi_p(v)]$$

où $\varphi_i(v)$ est la forme *complète* de degré i, aux variables v et ayant tous les coefficients 1. On vérifie sans peine que (2) ont lieu si $q = n-1$. Démontrons alors, par induction, que si (2) ont lieu pour q, elles subsistent pour $q-1$. En désignant par Σ' les sommes étendues aux quantités $u_1, \ldots u_{q-1}$, on a:

$$(3) \qquad \Sigma u_1 \ldots u_i = \Sigma' u_1 \ldots u_i + u_q \Sigma' u_1 \ldots u_{i-1}\,.$$

Donc $\Sigma' u_1 = (-1)[\varphi_1(v) + u_q] = (-1)\,\Phi_1(v)$, où $\Phi_i(v)$ désigne la forme analogue à φ_i, mais étendue à $v_1, \dots v_{n-q}, u_q$. Il est évident que

$$\Phi_i(v) = \varphi_i(v) + u_q\,\Phi_{i-1}(v). \tag{4}$$

(3) et (4) montrent que si (2) subsistent pour q, elles sont vraies aussi pour $q-1$. Elles sont donc établies.

Considérons maintenant l'équation:

$$y^n + C_n^p\,y^{n+p} + a_{p+1}\,y^{n-p-1} + \dots + a_n = 0. \tag{5}$$

Ses racines satisfont à (2). Prenons $p = q$, en considérant comme v les racines de (2) de modules les plus petits. Je dis que $|u_i| > 1$. Ceci est évident si les $|v|$ ne sont pas tous < 1. Si tous les $|v|$ sont < 1, on a $|\varphi_i(v)| < K_{n-p}^i = C_{n+i-p-1}^i$. L'équation de degré p ayant les racines u_i, est telle que le module de son terme libre est plus grand que la somme des modules des autres coefficients. On sait que les modules des racines de pareilles équations sont > 1. Donc (5) a au moins p racines de modules > 1. En posant $y = \dfrac{\sqrt[p]{C_n^p}}{x}$, l'équation (5) devient (1) et le théorème est démontré.

En particulier, *l'équation* $x^n + px + a = 0$, *où* $|p| \geq n$ *et* a *est quelconque a au plus une racine de module inférieur à* 1. Donc $f(z) = z + \dfrac{z^n}{n}$ est un exemple de fonction univalente dans le cercle $|z| = 1$ et dont tous les zéros de la dérivée sont sur le contour d'univalence; on peut même les considérer aussi rapprochés que l'on veut entre eux (pour n convenable).

2. Voici, à un point de vue différent, d'autres résultats. L'équation dont les coefficients consécutifs sont des puissances $-p$, entières et négatives, des termes consécutifs d'une progression arithmétique a au plus une racine réelle.

L'équation dont les coefficients consécutifs sont les termes consécutifs, ou les carrés des termes consécutifs d'une progression arithmétique, a au plus deux racines réelles.

ÜBER GITTERPUNKTE IN MEHRDIMENSIONALEN ELLIPSOIDEN

Von V. JARNÍK, Prag

In diesem ganzen Artikel seien zwei ganze Zahlen k_1, k_2 fest gegeben; $k_1 \geqq 4$, $k_2 \geqq 4$; weiter sei $k = k_1 + k_2$, $s = \min(k_1, k_2)$. Wenn $f(x)$, $g(x)$ für alle hinreichend großen x definiert sind, $g(x) > 0$, so soll die Formel $f(x) = O(g(x))$ bedeuten, daß $\limsup_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$ ist. Analog sollen die Formeln $f(x) = o(g(x))$, $f(x) = \Omega(g(x))$, $f(x) = \underline{O}(g(x))$, $f(x) = \underline{o}(g(x))$, $f(x) = \underline{\Omega}(g(x))$ bedeuten, daß bzw. $\limsup \frac{|f|}{g} = 0$, $\limsup \frac{|f|}{g} > 0$, $\liminf \frac{|f|}{g} < \infty$, $\liminf \frac{|f|}{g} = 0$, $\liminf \frac{|f|}{g} > 0$. Es seien nun α_1, α_2 zwei positive Zahlen; mit $Q(u)$ bezeichnen wir dann die quadratische Form $\alpha_1 \sum_{i=1}^{k_1} u_i^2 + \alpha_2 \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} u_j^2$ [1].

Für $x > 0$ sei $A(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im Ellipsoid $Q(u) \leqq x$; $V(x)$ sei das Volumen dieses Ellipsoids; endlich sei

$$P(x) = A(x) - V(x), \quad S(x) = \frac{1}{x} \int_0^x |P(y)|\, dy.$$

Um die „maximale" und „minimale" Größenordnung von $S(x)$ zu charakterisieren, definieren wir $f_1 = f_1(Q)$ und $f_2 = f_2(Q)$ folgendermaßen: für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$S(x) = O(x^{f_1+\varepsilon}),\ S(x) = \Omega(x^{f_1-\varepsilon}),\ S(x) = \underline{O}(x^{f_2+\varepsilon}),\ S(x) = \underline{\Omega}(x^{f_2-\varepsilon}).$$

Dann gelten folgende Sätze:

Satz 1: Für rationale Q ist

$$f_1(Q) = f_2(Q) = \frac{k}{2} - 1; \quad \text{genauer: } S(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right),\ S(x) = \underline{\Omega}\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Satz 2: Für irrationale Q ist $f_1(Q) \leqq \frac{k}{2} - 1$, es gibt aber irrationale Q mit $f_1(Q) = \frac{k}{2} - 1$; genauer: für irrationale Q ist $S(x) = o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)$; wenn aber $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) \to 0$ (für $x \to \infty$), so gibt es ein irrationales Q mit $S(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2}-1}\varphi(x)\right)$.

Dagegen gilt *Satz 3:* Für irrationales Q ist stets

$$f_2(Q) \leqq \frac{k}{2} - 1 - \frac{s-2}{s} \quad \left(\text{also} < \frac{k}{2} - 1\right);$$

[1]) wenn $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ rational bzw. irrational ist, so soll auch Q rational bzw. irrational heißen.

es gibt aber ein irrationales Q mit $f_2(Q) \geqq \frac{k}{2} - 1 - \frac{k}{k+2}$ (also $> \frac{k}{2} - 2$). Der Spielraum von f_1, f_2 ist nach unten abgegrenzt durch den *Satz 4:* Es ist $f_1(Q) \geqq f_2(Q) \geqq \frac{k}{2} - 2$; schärfer: Es ist $S(x) = \underline{\Omega}\left(x^{\frac{k}{2}-2}\right)$.

Wir klassifizieren nun die irrationalen Q folgendermaßen:

Es seien $q_1, q_2, q_3, \ldots$ die Näherungsnenner von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$; es sei $\nu = \nu(Q)$ die obere Grenze derjenigen Zahlen a, für welche (bei $n \to \infty$) $q_{n+1} = \Omega(q_n^{1+a})$ gilt. Dann gilt *Satz 5:*

$f_1 = \frac{k}{2} - 1 - \frac{1}{\nu + 1}$, $f_2 \leqq \frac{k}{2} - 1 - \frac{s-2}{s - \frac{2}{\nu+1}}$ (für $\nu = \infty$ ist $\frac{1}{\nu+1} = \frac{2}{\nu+1} = 0$ zu setzen).

Daraus folgt sofort *Satz 6:* a) Wenn Q rational ist, so ist $f_1 = f_2 = \frac{k}{2} - 1$; b) Wenn $\nu(Q) = 0$ ist[1]), so ist $f_1 = f_2 = \frac{k}{2} - 2$; c) In allen anderen Fällen ist $f_1 > f_2$.

Eine ausführliche Darstellung dieser Ergebnisse soll in der Mathematischen Zeitschrift (Ueber die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, 3. Abh.) erscheinen.

ÜBER GITTER UND QUADRATISCHE FORMEN

Von N. HOFREITER, Wien

Es sei ein n-dim. Gitter gegeben, O sei ein beliebiger Gitterpunkt. Es gibt nur endlich viele Gitterpunkte, die O am nächsten liegen. Ich wähle ein Paar aus: $E_1\ (x_{1i})$ und $\overline{E}_1\ (-x_{1i})$. Nun wähle ich ein zweites Paar von Gitterpunkten aus: $E_2\ (x_{2i})$ und $\overline{E}_2\ (-x_{2i})$, das O am nächsten liegt und nicht auf der Geraden (OE_1) liegt, nun das nächste (es darf nicht in der Ebene $(OE_1\, E_2)$ liegen) usw. bis zum n-ten Paar. Die Strecken OE_i heißen das 1., 2., ..., n-te Minimum. Es fragt sich nun, wann erzeugen die ersten n Minima ein Fundamentalparallelepiped. Diese Frage ist für die meisten Reduktionstheorien von großer Bedeutung. Es ist bekannt, daß die ersten 2 Minima in der Ebene ein Fundamentalparallelogramm erzeugen, ferner, daß die ersten 3 Minima im R_3 ein Fundamentalparallelepiped bestimmen (euklidische Maßbestimmung). Im R_4 erzeugen die ersten 4 Minima stets ein Fundamentalparallelepiped, ausgenommen ist nur ein einziges Gitter. In diesem Fall brauchen 4 erste

[1]) Bekanntlich ist $\nu = 0$ für fast alle positiven Werte von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ (im Lebesgueschen Sinne).

Minima kein Fundamentalparallelepiped zu bilden, aber man kann 4 erste Minima auswählen, die ein Fundamentalparallelepiped erzeugen. Für höherdimensionale Gitter ist fast gar nichts bekannt. Ich untersuche nun solche Gitter, insbesondere 5 und 6 dim. Gitter, und zeige, wieviele und welche Gitterpunkte im Parallelepiped liegen können, das aus den ersten n Minima erzeugt wird. Für $n = 6$ z. B. hat man die Fälle: 1. Die ersten 6 Minima erzeugen ein Fundamentalparallelepiped. 2. Der Mittelpunkt des Parallelepipeds ist Gitterpunkt. 3. Im Innern des Parallelepipeds liegen 2 Gitterpunkte. 4. In einer 5 dim. Wand (und ihrer Gegenfläche) ist der Mittelpunkt Gitterpunkt. 5. In einer 4 dim. Wand und ihren 3 Gegenflächen sind die Mittelpunkte Gitterpunkte. 6. In drei 4 dim. Wänden und ihren Gegenflächen sind die Mittelpunkte Gitterpunkte. Es gibt Gitter, bei denen sich keine ersten n Minima finden lassen, die ein Fundamentalparallelepiped bilden. Ist aber eine dem Gitter zugeordnete quadratische Form vollkommen (Voronoi, Crelle 133), dann lassen sich stets n erste Minima auswählen, die ein Fundamentalparallelepiped bestimmen. Mit Hilfe dieser tieferen Einsicht in Gitter kann man auch die Extremformen leichter bestimmen. Es sei M der Minimalwert einer Klasse positiver quadratischer Formen, D sei die Determinante. Formen, für die $\frac{M}{\sqrt[n]{D}}$ ein Maximum ist, heißen Extremformen. Den größten Wert $\frac{M}{\sqrt[n]{D}}$ bezeichne ich mit L_n. Es ist $L_2 = \sqrt{\frac{4}{3}}$, $L_3 = \sqrt[3]{2}$ (Gauß, Dirichlet, Minkowski, . . .), $L_4 = \sqrt{2}$, , $L_5 = \sqrt[5]{8}$ (Korkine und Zolotareff, Voronoi). Für $n \geqq 6$ sind zahlreiche Abschätzungsformeln bekannt (Korkine und Zolotareff, Minkowski, Blichfeldt, Remak, . . .), der genaue Wert aber nicht [1]). Ich zeige, wie man die bisher bekannten Extremformen leichter findet und berechne alle Extremformen mit 6 Variablen. Es gibt 4 Klassen von Extremformen, die durch die folgenden Formen repräsentiert werden können (von Proportionalitätsfaktoren wird abgesehen):

1) $F_1 = 2x_1^2 + \ldots + 2x_6^2 + 2x_1x_2 + \ldots + 2x_5x_6$,

2) $F_2 = 2x_1^2 + \ldots + 2x_6^2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 + 2x_1x_6 + 2x_2x_6 - 2x_4x_6 + 2x_5x_6$,

3) $F_3 = 2x_1^2 + \ldots + 2x_6^2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 + 2x_1x_6 + 2x_2x_5 + 2x_3x_5 - 2x_4x_5 + 2x_3x_6 - 2x_4x_6 + 2x_5x_6$,

4) $F_4 = 2x_1^2 + \ldots 2x_6^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 - 2x_2x_5 + x_3x_4 - 2x_3x_5 - 2x_4x_5 - \frac{3}{2}x_1x_6 - \frac{1}{2}x_2x_6 + x_3x_6 + x_4x_6 + x_5x_6$.

Für diese Formen ist $M = 2$ und $D = 7, 4, 3$ bzw. $\frac{3^3 \cdot 53}{2^8}$. Es ist $L_6 = \frac{2}{\sqrt[6]{3}}$.

[1]) Zusatz während der Korrektur: Prof. Blichfeldt fand vor kurzem, daß $L_6 = \frac{2}{\sqrt[6]{3}}$, $L_7 = \frac{2}{\sqrt[7]{2}}$, $L_8 = 2$.

A MATRIX REPRESENTATION OF ASCENDING AND DESCENDING CONTINUED FRACTIONS

By L. M. MILNE-THOMSON, Greenwich

The elements of a matrix, which is equal to the continued product of suitably chosen matrices, are shown to have the properties of the convergents of a continued fraction. The method leads at once to a generalised definition of continued fractions in many dimensions. By turning through two right angles the plane on which an ordinary (two dimensional) continued fraction is written, an ascending continued fraction composed of the same elements is obtained. This again can be represented by a product of matrices and generalised to many dimensions. Some properties and applications of continued fractions of both types are considered. A paper dealing with this subject will be published in the Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.

LE SERIE RICORRENTI ASSOCIATE DEL 2⁰ ORDINE

(Generalizzazione delle U_n e V_n di Lucas)

Di GIACOMO CANDIDO, Brindisi

1. **Defin.** *Due serie del 2º ordine*

$$W_0, \; W_1, \; \ldots, \; W_n, \; \ldots (W)$$
$$\Psi_0, \; \Psi_1, \; \ldots, \; \Psi_n, \; \ldots (\Psi)$$

entrambe riferite alla stessa equazione caratteristica

$$\xi^2 - p\xi + q = 0 \ldots [1],$$

coi rispettivi valori iniziali $W_0, W_1; \Psi_0, \Psi_1$ *le diremo associate se una coppia qualunque* (W_i, Ψ_i) *di termini corrispondenti verifica la identità*

$$\Psi_i^2(p,q) - \Delta W_i^2(p,q) = kq^i, \ldots [E]$$

con $\Delta = p^2 - 4q$, *e* k *costante.*

Es: 1) Le V_n ed U_n di Lucas. 2) Le soluzioni della equazione $x^2 - Ay^2 = kq^i$

2. L'integrale generale della (W) è dato da (Eulero, Le Longchamps, d'Ocagne):

$$W_n(p,q) = W_1 U_n - \mathrm{p} W_0 U_{n-1}$$

3. Questa formola si estende nell'altra:

$$W_{n+s} = W_n\, U_{s+1} - q\, W_{n-1}\, U_s$$

4. Mediante un teor. di Eulero si ricava la relazione

$$W_{n+1}^2 - p\, W_n\, W_{n+1} + q\, W_n^2 = (W_1^2 - p\, W_1\, W_0 + q\, W_0^2)\, q^n\,,$$

da cui $\Psi_n^2 - \Delta\, W_n^2 = (\Psi_0^2 - \Delta\, W_0^2)\, q^n\,, \;\ldots .\; [E]'$

con $\Psi_0 = 2\, W_1 - p W_0\,,\;\; \Psi_1 = p W_1 - 2 q W_0.$

La Ψ_n è la corrispondente V_n nelle funzioni di Lucas, ed è data da

$$\Psi_n = W_1\, V_n - q W_0\, V_{n-1}.$$

5. *Espressioni diverse che danno W_n e Ψ_n.*

6. *Forme lineari e quadratiche delle Ψ_n e W_n* = Queste forme provengono dalle relazioni: $\Psi_n + \delta W_n = (\Psi_0 + \delta W_0)\, x_1^n\,,\;\; \Psi_n - \delta W_n = (\Psi_0 - \delta W_0)\, x_2^n\,.$
Fra le forme quadratiche è notevole la generalizzazione della $[E]'$:

$$\Psi_{m+m}^2 - \Delta\, W_{m+m}^2 = q^m\, (\Psi_n^2 - \Delta\, W_n^2).$$

7. *Formole della somma e della differenza degli indici. Formole di prostaferesi.*

8. *Le W_{kn} e Ψ_{kn} sono espresse dalle relazioni*

$$W_{nk} = W_n\, V_n^{k.1} - q_n\, (W_{.n}\, V_n^{k\text{-}2} + W_{1.n}\, V_n^{k\text{-}3} + \ldots .\; W_{(k\text{-}3)n}\, V_n + W_{(k\text{-}1)n})\,,$$

$$\Psi_{2\rho n} = \Delta U_n\, [\, W_{(2\rho\text{-}1)n} + W_{(2\rho\text{-}3)n}\, q_n + W_{(2\rho\text{-}5)n}\, q^n + \ldots . + W_{1.n}\, q^{(\rho\text{-}1)n}] + \Psi_0\, q^{\rho^n}$$

$$\Psi_{(2\rho+1)n} = \Delta U_n\, [\, W_{2\rho n} + W_{(2\rho\text{-}5)n}\, q^n + \ldots . + W_{2n}\, q^{(\rho\text{-}1)n}] + \Psi_{1.n}\, q^{\rho^n}.$$

9. *Equazioni differenziali del 2° ordine relative alle W_n e Ψ_n analoghe a quelle già note per le V_n ed U_n:*

$$(p^2 - 4q)\, W''_n + 3p\, W'_n - (n^2 - 1)\, W_n - q\, (2n - 1)\, W_0\, U_{n\text{-}1} = 0$$

$$(p^2 - 4q)\, \Psi''_n + p\, \Psi' - n^2\, \Psi_n - q\, (2n - 1)\, W_0\, V_{n\text{-}1} = 0.$$

10. **Applicazioni proposte:** a) La equazione $\Psi_n\,(x,\, a) = b$ (Generalizzazione della equazione di Moivre-Fagnani). b) Il problema Newton espresso dalla equazione $\sqrt[n]{X \pm Y\sqrt{A}} = x \pm y\,\sqrt{A}$ (Plana, Chiò). c) Risoluzione della indeterminata

$$x^2 - Ay^2 = Kq^n\,.$$

MAXIMALE SYSTEME UNENDLICHER MATRIZEN

(Bericht über eine Arbeit von O. Toeplitz und G. Köthe)

Von GOTTFRIED KÖTHE, Münster i. W.

Die linearen Transformationen $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$, die den *Hilbert*schen Raum (dies ist der Raum aller Vektoren $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, für die $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ konvergiert) in sich überführen, bilden ein System von unendlichen Matrizen, in dem Summe und Produkt zweier Matrizen erklärt sind, wieder im System liegen und den üblichen Rechenregeln genügen. Nach *Hellinger* und *Toeplitz* [1]) ist dieses System *maximal*, d. h. es ist nicht echtes Teilsystem eines Matrizensystems, dessen Matrizen ebenfalls den Kalkül gestatten. Weitere Beispiele maximaler Matrizensysteme sind das System aller zeilenfiniten [2]), das aller spaltenfiniten [2]) und das aller halbfiniten [3]) Matrizen. Diese Systeme stellen wieder jeweils die Gesamtheit der linearen Transformationen $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$ der linearen Räume dar, die von allen Spaltenvektoren aller Matrizen (a_{ik}) des Systems aufgespannt werden. Diese Spaltenräume haben die Eigenschaft, daß sie mit jeder Spalte $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ auch alle Spalten $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 x_1 \\ \varepsilon_2 x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ enthalten, $|\varepsilon_i| = 1$, $i = 1, 2, \ldots$ Ein solcher linarer Raum heiße *absolut konvergent*. Unter dem *dualen Raum* λ^* eines linearen Raumes λ verstehen wir die Gesamtheit aller Vektoren $\mathfrak{u} = (u_1\ u_2, \ldots)$, deren skalares Produkt $(\mathfrak{u}, \mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i$ mit allen Vektoren $\mathfrak{x}$ aus λ existiert (die unendliche Summe muß also konvergieren). λ heißt *vollkommen*, wenn $\lambda = \lambda^{**}$. Das Hauptresultat unserer Theorie lautet nun:

Die Gesamtheit der linearen Transformationen $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$ eines vollkommenen, absolutkonvergenten Raumes in sich bildet ein maximales Matrizensystem. Umgekehrt hat jedes maximale Matrizensystem mit absolutkonvergentem Spaltenraum diese Form.

Die Theorie wird dann auf die verschiedenen Spezialfälle angewandt und liefert da, z. B. im Hilbertschen Raum, erhebliche Vereinfachungen der bisher üblichen [1]) Beweise.

---

1) Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen, Math. Annalen 69 (1909), S. 289 ff.

2) Vgl. O. Toeplitz, Pal. Rend. 28 (1909), S. 88 ff.

3) Vgl. G. Köthe u. O. Toeplitz, Journal f. d r. u. a. Math. 165 (1931), S. 116 ff.

Wesentlich für den Erfolg, anscheinend so divergente Theorien wie die des Hilbertschen und des zeilenfiniten Systems als Spezialfälle einer allgemeinen Theorie erkennen zu können (sogar der Satz von *O. Toeplitz* über lineare Mittelbildungen [1]) findet seine Stelle in unserer Theorie), ist die Einführung eines linearen topologischen Raumes statt des bisher üblichen linearen metrischen Raumes.

Für beliebige, nicht mehr absolut konvergente lineare Räume gilt die Theorie in ihrem ganzen Umfang nicht mehr, hier liegen kompliziertere Verhältnisse vor, die der vollen Klärung noch bedürfen.

Die vorstehende Theorie ist gedacht als Grundlage für eine allgemeine Theorie der linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.

SULLE EQUAZIONI ALGEBRICHE

Di G. BELARDINELLI, Jesi, Italia

In alcuni lavori mi sono occupato della risoluzione delle equazioni algebriche, ed ho dimostrato che una radice di una equazione algebrica di grado n è rappresentata da una serie di potenze avente per coefficienti funzioni di Pochhammer di ordine n.

Se si considera une equazione algebrica di grado n in y, i cui coefficienti siano polinomi in x, si ha che un ramo di questa funzione algebrica, che tende ad ω per x tendente a zero, è esprimibile mediante una serie di polinomi in x (polinomi che si annullano per $x = 0$) avente per coefficienti funzioni di Pochhammer di ordine n.

Da questa serie di polinomi si può ottenere una serie di potenze di x, rappresentante il ramo considerato di funzione algebrica.

Su questa serie di potenze si possono fare queste considerazioni:

1º I coefficienti sono somme di funzioni di Pochhammer di ordine n.

2º Ai coefficienti si possono associare delle funzioni di ω nella stessa guisa che i polinomi di Legendre sono legati ai coefficienti dello sviluppo in serie di una radice di una equazione algebrica di secondo grado.

Queste funzioni di ω, che possono chiamarsi funzioni di Legendre associate ad una funzione algebrica, sono somme di funzioni di Pochhammer. Questo risultato generalizza la classica proprietà dei polinomi di Legendre di essere esprimibili mediante la funzione ipergeometrica di Gauss.

---

1) O. Toeplitz, über allgemeine lineare Mittelbildungen, Trac Matematyczno-Fizycznych XXII, 1911, S. 113.

ON LINEAR INEQUALITIES

By L. L. DINES, Saskatoon, Canada

The purpose of this communication is to describe an undertaking in which the author has been engaged in collaboration with N. H. McCoy. Since the first attempt at a systematic study of linear inequalities by Fourier in 1824, a number of authors have given attention to the subject. In our bibliography we list no less than 37 titles under which the subject is treated more or less directly. Some of these contributions have appeared in unexpected places, and some of the contributors, including the present author, have at times worked in ignorance of important earlier contributions. Our present attempt has therefore been chiefly to make a somewhat comprehensive summary of the various developments in this field. However we have not hesitated to introduce new notions and new proofs where it was felt that improvement was possible, and a number of new results appear for the first time.

The general problem is relative to a system of inequalities of the form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

and to other systems obtained from this by alteration of the relation $\geqq$, and by generalization and extension to include various types of functional inequalities. The results obtained have to do with: (1) conditions for the existence of a solution, (2) methods of determining solutions, (3) expression of the general solution in terms of certain fundamental solutions, and (4) relations between a given system of inequalities and the associated system of linear equations, which for the system displayed above would be

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

The last of these four types of results is intimately connected with the problem of the *positive* solutions of linear equations.

NOMBRES PREMIERS ET COMPOSÉS

Par A. GÉRARDIN, Nancy

L'étude des nombres premiers et de la factorisation a attiré des milliers de mathématiciens, depuis les temps connus.

J'ai étudié ces sujets pendant plus de 25 ans, et j'ai publié de nombreuses méthodes dans la presse scientifique.

Algebra und Zahlentheorie

Je donne ici un exemple d'une méthode inédite pour $hY^2 + kZ^2$, lorsque les diviseurs ont la même forme.

Principale	$2X^2 + 1$	
Dépendantes impaires		$8x^2 + 8x + (4r^2 + 4r + 3)$
Dépendante Major	$8x^2 + 8x + 3$	
Dépendantes paires		$4x^2 + 4x + (2s^2 + 1)$
Dépendante Minor	$4x^2 + 4x + 3$	
Secondaires		$Y^2 + 2Z^2$
Secondaire Major	$8x^2 + 1.$	
A_1 Adjointe impaire d'ordre un	$2px^2 \pm 2ix + w$	
avec		$2i^2 + 1 = p \cdot w$

Il est très intéressant d'étudier jusqu'à 10 milliards, par exemple, la factorisation complète de $2X^2 + 1$ qui *domine* le champ $Z^2 + 2Y^2$. Notre méthode établit d'abord la Table des Racines (deux racines pour chaque nombre premier diviseur de la forme), jusqu'à la limite nécessaire, ici, $p < 100\,000$.

J'ai démontré que, grâce au « protée général modulaire » facilement calculé, on peut obtenir la Table des Racines d'une Dépendante quelconque, par calcul mental, ou arithmétique. (Pour une Principale quelconque, on peut faire ce calcul aussi par notre méthode de Tableaux, ou par notre Algorithme.)

La juxtaposition de la Dépendante Major et de la Secondaire Major donne la factorisation complète de la série étudiée. Il est très important de l'avoir, car la Méthode des Adjointes permet sans calcul spécial d'obtenir de nouveaux milliers de nombres premiers.

L'ensemble de mes méthodes, standardisées et taylorisées, avec un grand Historique spécial, et des Tables importantes donne la factorisation de séries immenses et découvre des nombres premiers inédits de 8, 9, 10... chiffres par dizaines de milliers, en pratique.

Bibliographie:

DICKSON, L. E., History of the Theory of Numbers (T. I et II, Carnegie 1919, 1920).

A. GÉRARDIN, Mémoire Congrès Intern. Math. Bologne, 1928.

— Mémoire Congrès Sociétés Savantes 1932 (121 nombres premiers inédits de 8 chiffres).

— Liste des 1001 nombres premiers de la forme $2x^2 + 2x + 1$ pour x compris entre 15800 et 23239 (f_x de 499311601 à 1080148721). (Sphinx-Oedipe 1932).

— Liste inédite de 1035 nombres premiers de 8 et 9 chiffres extraits de diverses séries quadratiques (Sphinx-Oedipe).

— Factorisations Quadratiques et Primalité, Nancy, 1932, in-8°, 104 p. (Sphinx-Oedipe).

ANALYSIS

ÜBER FUNKTIONEN MIT POSITIVEM REALTEIL

Von W. CAUER, Göttingen

In der Elektrotechnik liegt häufig die Aufgabe vor, Schaltungen zu konstruieren, die hinsichtlich der Abhängigkeit von der Frequenz ω des Wechselstroms vorgeschriebene Eigenschaften besitzen. Als Wechselstromwiderstände treten Funktionen des Frequenzparameters $\lambda = i\omega$ auf, die dadurch charakterisiert sind, daß sie sich in der rechten Halbebene regulär verhalten, dort positiven Realteil besitzen und für reelle λ reelle Werte annehmen („positive Funktionen“). Der Begriff solcher positiver Funktionen gestattet eine Verallgemeinerung auf positive Matrizen, welche Vierpolschaltungen usw. charakterisieren. Neben der Aufgabe, gegebene positive Funktionen oder positive Matrizen durch Schaltungen zu realisieren, ergeben sich aus den technischen Fragestellungen Interpolations- und Approximationsprobleme, welche in enger Beziehung zu den von G. Pick und Rolf Nevanlinna bei beschränkten Funktionen behandelten Interpolationsproblemen stehen, die ihrerseits eine Verallgemeinerung des Caratheodory-Toeplitzschen Koeffizientenproblems darstellen. So läßt sich z. B. das Problem, Realteil und Imaginärteil einer empirisch gegebenen Wechselstromwiderstandsfunktion für endlich viele Frequenzen durch eine nur aus Kapazitäten und Ohmschen Widerständen bestehende Zweipolschaltung exakt wiederzugeben und dabei zugleich die Lösbarkeit der Aufgabe zu entscheiden, auf das von G. Pick behandelte Problem zurückführen, das lautet: Eine rationale Funktion $w\ (z)$ ist so zu bestimmen, daß sie in einer z-Kreisscheibe regulär ist, dort nur w-Werte aus einer andern Kreisscheibe und dabei zu endlich vielen z_ν vorgeschriebene Werte w_ν annimmt.

Etwas näher erläutert werden möge das Approximationsproblem der vierpoligen symmetrischen Siebschaltungen. Hier sind zwei rationale positive Funktionen $z_1(\lambda)$ und $z_2(\lambda)$ so zu bestimmen, daß approximativ $\frac{z_1}{z_2} = 1$ in vorgeschriebenen Intervallen der positiv imaginären Achse (Durchlaßbereichen) und $z_1 z_2 = 1$ in den komplementären Intervallen (Sperrbereichen) wird. Nur solche positive Funktionen kommen hier als interpolierende Funktionen in Frage, die auf der imaginären Achse rein imaginär sind. Es ergeben sich für jede Filtertype (z. B. Tiefpaß) nur ganz bestimmte Funktionen als möglich für $\sqrt{\frac{z_1}{z_2}}$ bezw. $\sqrt{z_1 z_2}$. Es sind positive algebraische Funktionen, deren Quadrat rational und auf der imaginären Achse reell ist. Diejenigen Intervalle der imaginären Achse, wo $\sqrt{\frac{z_1}{z_2}}$ bezw. $\sqrt{z_1 z_2}$ positiv ist, sind polfrei, und in ihnen sollen jene idealen Forderungen approximativ erfüllt werden. Ein Beweis

für die Lösbarkeit des Approximationsproblems ergibt sich durch eine Poissonsche Integraldarstellung. Wichtig ist die Durchführung der Approximation im Tschebyscheffschen Sinne. Man wird dabei u. a. auf das Problem geführt: Unter den Funktionen

$$y = ln \sqrt{q} = ln \frac{\mathfrak{C} \sqrt{\Omega + 1}\,(\Omega + a_2)\,(\Omega + a_4)\,\ldots\,(\Omega + a_{2\nu'})}{\sqrt{\Omega - 1}\,(\Omega + a_1)\,(\Omega + a_3)\,\ldots\,(\Omega + a_{2\nu'-1})}$$

soll diejenige bestimmt werden, deren Maximalabweichung von Null in den Intervallen $(-\infty, -k)$ und (k, ∞), wo $k > 1$, ein Minimum wird. Dies führt auf ein Transformationsproblem der elliptischen Funktionen mit gebrochener Teilung. Die Form der Lösung

$$\sqrt{q} = \sqrt{\frac{\Omega + 1}{\Omega - 1}} \prod_{\mu=1}^{\nu'} \frac{\Omega - (-1)^{\mu+\nu'}\, sn \frac{(2\mu - 1)K}{n}}{\Omega + (-1)^{\mu+\nu'}\, sn \frac{(2\mu - 1)K}{n}},$$

wo K das zum Modul k^{-1} gehörige vollständige elliptische Integral erster Gattung ist, zeigt — das ist wesentlich —, daß die Forderungen der „Positivheit“ (physikalischen Realisierbarkeit)

$$1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{2\nu'-1} > a_{2\nu'} > -1$$

erfüllt sind.

SUI PUNTI IRREGOLARI DI UNA FAMIGLIA NON NORMALE DI FUNZIONI OLOMORFE

Di TULLIO VIOLA, Bologna

1. L'insieme dei punti d'irregolarità di una famiglia non normale di funzioni olomorfe è stato studiato da diversi autori e può presentare delle particolarità notevoli. Per esempio se in un dominio (D) una famiglia non normale V è limitata in ogni punto, allora, come ha dimostrato il *Sig. Montel*[1]), l'insieme è perfetto, non denso, continuo e connesso con la frontiera di (D).

Sia P un punto irregolare e sia (S) una successione estratta da V «eccezionale» in P, cioè tale che nessuna successione parziale di (S) converga uniformemente in nessun intorno di P.

---

1) *Leçons sur les séries de polynômes* (Collection Borel, 1910), p. 118.
Leçons sur les familles normales (Id. 1927), p. 39.

Evidentemente ogni successione estratta da (S) è ancora eccezionale in P.

Anche (S), come V, non è nè normale nè quasinormale in (D).

I punti irregolari di (S) costituiscono un aggregato perfetto $\mathfrak{N}$ contenente P, contenuto nell'aggregato $\mathfrak{M}$ dei punti irregolari di V, perfetto, continuo, non denso, connesso con la frontiera di (D).

Sia P_1 un punto di $\mathfrak{N}$ diverso da P. Ragionando su (S) come su V, si vede che esiste una successione (S_1) estratta da (S), eccezionale in P_1.

(S_1) è eccezionale in P e in P_1 e non è normale nè quasinormale in (D). I suoi punti irregolari costituiscono un aggregato perfetto $\mathfrak{N}_1$ contenente P e P_1, contenuto in $\mathfrak{N}$, perfetto, non denso, continuo, connesso con la frontiera di (D).

Così proseguiamo indefinitamente.

Si può imporre la condizione che (S_1) cominci con la prima funzione $f_1(z)$ di (S), che (S_2) cominci con le prime due funzioni $f_1(z)$, $f_2(z)$ di (S_1), che (S_3) cominci con le prime tre funzioni $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ di (S_2), ecc.

Dunque la successione $(\Sigma) \equiv f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ è eccezionale in tutti i punti $P, P_1, P_2 \ldots$

2. Sia P_0 un punto interno a (D), limite di punti P_n. Dico che (Σ) è eccezionale anche in P_0. Infatti, se C_0 è un intorno di P_0 comunque piccolo, esistono infiniti P_n interni a C_0. Dunque C_0 è intorno anche per infiniti P_n e quindi nessuna successione parziale di (Σ) può convergere uniformemente in C_0.

Data l'arbitrarietà della scelta dei punti P_n, si può sempre fare in modo che questi punti costituiscano un insieme denso in sè, talchè, a chiusura eseguita, si ottenga un aggregato perfetto, ed anzi può farsi in modo che tale aggregato perfetto sia continuo, non denso e connesso con la frontiera di (D).

Si conclude dunque con la proposizione seguente:

Se V è una famiglia non normale di funzioni olomorfe in un dominio (D), limitata in ciascun punto di (D), ogni punto irregolare di V fa parte di un (almeno) insieme di punti irregolari per i quali esiste una medesima successione eccezionale. Tale insieme, come quello totale dei punti irregolari di cui fa parte, è perfetto, non denso, continuo e connesso con la frontiera di (D).

3. Mi pare che questa proposizione potrebbe avere un significato notevole nello studio del comportamento di una funzione intera. Infatti, se l'insieme delle rette di Julia è non denso in tutto un angolo α di vertice l'origine, a ciascuna di quelle rette, lungo la quale sia verificata qualche ipotesi restrittiva che si tratterebbe di precisare (equivalente alla limitazione della famiglia corrispondente) appartiene tutto un segmento di punti irregolari per la famiglia corrispondente. Tale segmento, che è interamente con tenuto nel cerchio di raggio $=1$ ed ha un estremo sulla circonferenza, ammetterà in tutti i suoi punti una medesima successione eccezionale.

Analysis

SUR UN THÉORÈME DE M. PÓLYA

Par A. ZYGMUND, Wilno

Cette communication a pour objet une démonstration nouvelle et élémentaire du théorème suivant, démontré en commun avec M. Paley (Proc. Cambridge Phil. Soc., April 1932): Pour „presque toutes" les suites $\{\varepsilon_n\}$ de signes, $\varepsilon_n = \pm 1$, tous les points du cercle de convergence des séries $\Sigma \varepsilon_n a_n z^n$ sont singuliers.

REMARQUE SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Par M. PETROVITCH, Belgrade

1. Les remarques qui suivent se rapportent aux équations linéaires binomes

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \lambda(x) y = 0 \tag{1}$$

ayant comme intégrale particulière l'une des fonctions elliptiques

$$y = snx \qquad y = cnx \qquad y = dnx. \tag{2}$$

Le coefficient $\lambda(x)$ *est une fonction de* x *bornée pour toutes les valeurs réelles de* x*, lorsque* n *est pair; il ne l'est jamais pour* n *impair.*

Considérons, pour fixer les idées, le cas où $y = snx$. Soit $x = \alpha$ un zéro réel de snx, c'est-à-dire l'une des valeurs

$$\alpha_1 = 4mK \qquad \alpha_2 = 6mK \tag{3}$$

où

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

m étant un entier.

L'on sait que $sn\,(\alpha + x)$ est une fonction impaire de x s'annulant pour $x = 0$; on aura donc au voisinage de $x = 0$

$$sn\,(\alpha + x) = A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + \ldots \tag{4}$$

et l'on s'assure, de la manière connue, que tous les A_k sont différents de zéro. Il s'en suit que:

1⁰ toute dérivée d'ordre *pair* est une fonction *impaire* de x, ayant $x = 0$ comme zéro simple;

2⁰ toute dérivée d'ordre *impair* est une fonction *paire* de x, ne s'annulant pas pour $x = 0$.

Comme d'après les relations

$$sn\,(\alpha_1 + x) = snx \qquad sn\,(\alpha_2 + x) = -\,snx$$

les dérivées des snx coïncident, au signe près, avec celles de la fonction (4), le rapport

$$\frac{1}{snx}\,\frac{d^n}{dx^n}\,snx$$

sera fini où infini pour $x = 0$, et par suite aussi pour $x = \alpha$, suivant que n est pair, ou impair.

La démonstration est aussi valable pour les fonctions cnx et dnx.

2. Considérons le cas particulièrement intéressant de l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda\,(x)\,y = 0 \tag{5}$$

Les formules

$$\frac{d^2}{dx^2}\,snx = (1 - k^2 - 2\,dn^2 x)\;snx$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\,cnx = (2\,k^2\,sn^2 x - 1)\;cnx$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\,dnx = k^2\,(2\,sn^2 x - 1)\;dnx$$

montrent que le coefficient $\lambda\,(x)$ a pour l'expression

pour snx: $\lambda\,(x) = 2\,dn^2 x + k^2 - 1$

pour cnx: $\lambda\,(x) = 1 - 2\,k^2\,sn^2 x$

pour dnx: $\lambda\,(x) = k^2\,(1 - 2\,sn^2 x)$

d'où l'on tire facilement le résultat suivant:

L'équation (5) ayant comme intégrale particulière l'une des fonctions (2) a comme coefficient $\lambda(x)$ une fonction bornée pour toutes les valeurs réelles de x; cette fonction oscille autour de la valeur moyenne

$$\begin{array}{rl} 1 & \text{pour } y = snx \\ 1-k^2 & \text{pour } y = cnx \\ 0 & \text{pour } y = dnx \end{array}$$

l'amplitude commune de ces oscillations étant k^2.

Ces faits subsistent manifestement aussi pour le coefficient $\lambda(x)$ de l'équation de Riccati

$$\frac{du}{dx} + u^2 + \lambda(x) = 0$$

ayant comme intégrale particulière la dérivée logarithmique de l'une des fonctions (2).

Il s'en suit du résultat précédent que la fonction $\lambda(x)$, correspondant à $y = snx$, garde un signe *positif* invariable pour toute valeur réelle de x. La méthode de comparaisons de Sturm, appliquée à l'équation (5) permet alors, par exemple, d'assigner une limite supérieure et une limite inférieure au nombre des zéros de snx compris dans un intervalle donné de x, ce qui conduit à une limite supérieure et une limite inférieure pour l'intégrale elliptique K.

Pour que la fonction $\lambda(x)$ correspondant à $y = cnx$ garde un signe positif invariable, il faut et il suffit que le module soit plus petit que $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour $y = dnx$ la fonction $\lambda(x)$ change de signe un nombre illimité de fois.

INTEGRALE ERSTER GATTUNG AUF SPEZIELLEN TRANSCENDENTEN RIEMANNSCHEN FLÄCHEN

Von HANS HORNICH, Wien

Die Definition der Integrale erster Gattung auf algebraischen Riemannschen Flächen durch ihre beiden Eigenschaften, überall auf der Fläche sich regulär zu verhalten und bei Durchlaufung geschlossener Wege sich nur um additive Konstante

zu vermehren, läßt sich nicht auf solche transcendente Riemannsche Flächen übertragen, welche kritische Stellen (im Sinne von Nevanlinna) aufweisen; als solche werden alle Stellen bezeichnet, in deren Umgebung die Fläche nicht schlicht oder höchstens algebraisch verzweigt ist, also die Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung und die Häufungsstellen von Verzweigungspunkten. An den kritischen Stellen gibt es keine ortsuniformisierende[1]) Parameter t und damit auch keine Funktionen, die an diesen Stellen sich regulär verhalten.

Für spezielle Fälle, nämlich die zweiblättrigen Riemannschen Flächen F, deren Verzweigungspunkte reell sind und sich nur im Unendlichen häufen, kann man ein System von Eigenschaften angeben, durch welche — in sinngemäßer Verallgemeinerung der klassischen Begriffe — Integrale erster Gattung auf F definiert werden sollen.

Wir nennen u ein Integral erster Gattung auf F, wenn

I. u sich für jede endliche Stelle von F regulär verhält,

II. bei Durchlaufung geschlossener Wege u sich nur um additive Konstante verändert;

III. der Realteil $\mathfrak{R}(u)$ auf der entsprechend aufgeschnittenen Fläche F beschränkt ist,

IV. es eine Folge von Gebieten G_1, G_2, $G_3 \ldots$ auf F gibt, so daß sie monoton wachsen $G_1 < G_2 < G_3 < \ldots$, ganz im Endlichen von F gelegen sind, daß jeder endliche Punkt von F in einem G_i gelegen ist, und daß schließlich das über den Rand von G_i erstreckte Integral $\int \left| \frac{\partial \mathfrak{R}(u)}{\partial n} \right| ds$ mit wachsendem i gegen Null konvergiert (n die Normale auf den Rand von G_i).

Die Integrale erster Gattung auf F sind durch ihre Perioden in genau derselben Weise bestimmt, wie die algebraischen Integrale erster Gattung; insbesondere ist ein eindeutiges Integral erster Gattung notwendig konstant.

Stellt man die Fläche F in geeigneter Weise als Limes von hyperelliptischen Gebilden F_p von wachsendem Geschlecht p dar, so kann man unter gewissen Voraussetzungen über die Verteilung der Verzweigungspunkte die Integrale erster Gattung auf F als Grenzfunktionen von entsprechend normierten Integralen erster Gattung auf den F_p darstellen und damit ein Verfahren zur tatsächlichen Konstruktion dieser Integrale angeben.

---

[1]) ortsuniformisierend in dem Sinn, daß der Parameter t eine Umgebung der Stelle p auf die schlichte Kreisscheibe mit dem Bild von p als Mittelpunkt abbildet.

Analysis

ÜBER DIE RIEMANN'SCHE Q-FUNKTION

Von WILHELM MAIER, Lafayette (Ind.)

Die Systematik der analytischen Funktionen einer Veränderlichen verdankt B. Riemann den Gesichtspunkt, jene durch eine Kleinstzahl unabhängiger Bedingungen zu bestimmen. Aus den von Riemann durchgeführten Beispielen können jedoch Bedingungen im Großen soweit entfernt werden, daß durch Kenntnis ihrer Singularitäten schon die Kennzeichnung der Funktion gelingt. Für $a, b \not\equiv 0\,(1)$; $\Re\,(a + b - c - d) = 0$; $z \neq |z| = 1$ stellt der summierbare Ausdruck

$$\sum_{\mp\infty}^{\equiv\nu^{*(1)}} \nu \, \frac{\Gamma(a+\nu)\;\Gamma(b+\nu)}{\Gamma(c+\nu)\;\Gamma(d+\nu)}\, z^{\nu} = Q(z)$$

eine in z analytische Funktion dar, die als naturgemäße Verallgemeinerung der hypergeometrischen Reihe eingeführt und durch ihr „doppelt radikales" Verzweigungsverhalten in genau drei singulären Stellen der z-Ebene wesentlich bestimmt ist. Die Uniformisierung von Q-Funktionen führt auf die durch Hermite und Kronecker betrachteten Lamé'schen Funktionen. Die Kennzeichnung von $Q(z)$ durch ihre Singularitäten führt aber auch zu Funktionalgleichungen, wie sie insbesondere im hypergeometrischen Grenzfall

$$\lim_{a \to 0} \left[\frac{\partial}{\partial a} F\left(\sqrt{a}\,,\ \sqrt{a}\,,\ 1\,;\ z\right) \right] = \psi(z)$$

auf anderem Wege durch N. Abel aufgestellt wurden.

SUR LES BANDES DE DÉTERMINATION INFINIE DES FONCTIONS ENTIÈRES

Par HENRI MILLOUX, Strasbourg

1. — *Définition.* — Soit D un domaine connexe du plan de la variable complexe $z = r e^{i\theta}$ ne contenant pas l'origine. Coupons D par le cercle $|z| = r$. La différence des arguments de deux points de D situés sur ce cercle peut se déterminer par continuité sans quitter D. Nous appellerons *extension angulaire du domaine D sur le cercle* $|z| = r$, quantité désignée par E_r, la borne supérieure de ces différences : dans le cas où l'on peut faire le tour de l'origine sans quitter D, l'extension angulaire est *infinie ;* dans le cas contraire, elle est *inférieure à* 2π.

2. — En utilisant le principe de la majorante harmonique et le théorème fondamental sur la représentation conforme des bandes, de la thèse de M. *Ahlfors,* on obtient le :

Théorème. — Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans et sur le cercle $|z| = r_2$; m_2 une quantité supérieure ou égale aux valeurs de $|f(z)|$ sur ce cercle ; m la valeur de $|f(z)|$ en un point M de module r_0 (inférieur à r_2) et m_1 une quantité positive inférieure à m.

L'ensemble des points où $|f(z)|$ est supérieur à m_1 comprend un domaine connexe D contenant M. Si l'on désigne par E_r l'extension angulaire de D sur le cercle $|z| = r$, ou bien E_r est infinie pour une valeur au moins de r comprise entre r_0 et r_1, ou bien on a l'inégalité :

$$\int_{r_0}^{r_2} \frac{dr}{r E_r} < 5 + \frac{1}{\pi} \log. \frac{\log m_2 - \log m_1}{\log m - \log m_1}. \tag{1}$$

3. — Dans le cas des fonctions entières d'ordre fini ϱ supérieur à $\frac{1}{2}$, on peut par exemple choisir M de façon que $\log m > r_0^{\rho - \varepsilon}$; ensuite : $\log m_1 = \frac{1}{2} r_0^{\rho - \varepsilon}$. Il en résulte que le maximum de l'extension angulaire du domaine D précédent est au moins égal à une quantité aussi voisine que l'on veut de $\frac{\pi}{\varrho}$ pourvu que ε et r_2 soient convenablement choisis.

4. — Mais l'intérêt principal de l'inégalité (1) réside en ce qu'elle s'applique aussi bien aux fonctions entières d'ordre infini ; elle peut servir de point de départ dans l'étude de la distribution des valeurs de telles fonctions et sert à démontrer l'existence de deux suites, distinctes angulairement, de cercles de remplissage. Cette existence a déjà été démontrée par une autre méthode, moins simple et moins précise.

ÜBER DIE ORDNUNG EINER GANZEN FUNKTION MIT PARAMETER

Von GUSTAV HÖSSJER, Malmö

Es sei $F(x, t)$ eine analytische Funktion der beiden komplexen Veränderlichen x und t, und zwar eine ganze Funktion der endlichen Ordnung $\varrho(t)$ von x, wenn t in einem abgeschlossenen Bereiche T der t-Ebene festgehalten wird [1]. *Dann ist $\varrho(t)$ eine subharmonische Funktion* [2] *im Inneren von T.*

Definitionsmäßig ist $\varrho(t) = \overline{\lim\limits_{R \to \infty}} \frac{\log\log M(R)}{\log R}$, wobei $M(R) = \text{Max} \mid F(x, t) \mid$ für $\mid x \mid = R$ ist. Es sei nun für ein festes, genügend großes $M > 0$ $R_M(t)$ der Radius mit $\text{Max} \mid F(x, t) \mid = M$ für $\mid x \mid = R_M(t)$. Dann zeigt man erstens, daß $\log R_M(t)$ *superharmonisch* ist, zweitens, daß für eine positive, *superharmonische* (oder *harmonische*) Funktion $\varphi(t)$ ist $\frac{1}{\varphi(t)}$ subharmonisch (also ist hier $\frac{1}{\log R_M(t)}$ subharmonisch). Daraus folgt leicht der Satz, in dem man eine passende Folge M-Werte $M_\nu \to \infty$ $(\nu = 1, 2, ..)$ nimmt.

EINE VERALLGEMEINERUNG DES PICARDSCHEN SATZES

Von L. V. AHLFORS, Åbo, Finnland

Der Picardsche Satz kann folgenderweise formuliert werden: *Es gibt keine drei Punkte a, b und c, welche für sämtliche Zweige der Umkehrfunktion $z(w)$ einer in der ganzen Ebene meromorphen Funktion $w = f(z)$ transzendente Singularitäten sind.*

Dieser Satz ist von sehr spezieller Natur, weil er verlangt, daß alle Singularitäten genau über denselben drei Punkten liegen. Die naturgemäße Verallgemeinerung des Picardschen Satzes ist also die folgende:

---

[1] Beispiel einer solchen Funktion ist die Funktion $E_a(x) = \sum\limits_0^\infty \frac{x^n}{\Gamma(1 + an)}$, deren Ordnung die subharmonische Funktion $\frac{1}{a_1}$ $(a = a_1 + ia_2)$ ist.

[2] Siehe über subharmonische Funktionen: *F. Riesz*, Sur les fonctions subharmoniques etc. Acta Math. 48 (1927).

In der w-Ebene seien drei außerhalb einander gelegene Kreise C_1, C_2, C_3 gegeben. Wenn $w = f(z)$ in der ganzen Ebene meromorph ist, so gibt es einen Zweig der Umkehrfunktion $z(w)$, der in einem der Kreise C_ν algebraischen Charakter besitzt, d. h. wenn man den Zweig innerhalb des betreffenden Kreises in allen möglichen Weisen fortsetzt, so nimmt er in jedem Punkt nur endlich viele verschiedene Werte an.

Der Beweis dieses Satzes gelingt mit Hilfe einer von mir öfters verwendeten geometrischen Methode.

EINE ABBILDUNGSAUFGABE ZUR THEORIE DER WERTVERTEILUNG

Von EGON ULLRICH, Marburg a. d. Lahn

In der Theorie der Wertverteilung rückt neuerdings die Riemannsche Fläche in den Vordergrund des Interesses, welche eine meromorphe Funktion $f(z) = w$ als Bild ihres Existenzgebiets erzeugt (punktierte Ebene oder Einheitskreis). Beachtet man, daß $f(z)$ hier eine im allgemeinen konforme Abbildung eines *einblättrigen* Gebiets auf die *unendlich vielblättrige* Fläche leistet, so ist man versucht zu erwarten, *daß bei einer solchen Abbildung im allgemeinen stark vergrößert werden muß.*

Diese Vermutung läßt sich, bei geeigneter Präzisierung, durch den Koebeschen Verzerrungssatz bestätigen, wie ich hier zeigen will.

Aus der Riemannschen Fläche stanze ich die Umgebung $|w-a| < \varepsilon$ einer Sorte a aus und nehme an, daß für ein gewisses a und passendes $\varepsilon < 0$ nur schlichte Stücke ausgeschnitten werden; a heiße dann *gewöhnliche Sorte;* offenbar ist auch jede Sorte b der ε-Umgebung von a eine solche. Die Punkte der z-Ebene, wo $f(z) = a$ gilt, bezeichne ich mit a_ν und die zugehörigen Zweige der Umkehrfunktion mit $\varphi_\nu(w)$.

Jeder solche Zweig bildet die schlichte Scheibe $|w-a| < \varepsilon$ schlicht auf ein Gebiet $\mathfrak{G}_\nu$ der z-Ebene ab, wobei nach dem Verzerrungssatze für $|b-a| = \varrho\,\varepsilon$, mit $\varrho < 1$, gilt:

(1) $$|\varphi_\nu'(a)| \frac{1-\varrho}{(1+\varrho)^3} \leqq |\varphi_\nu'(b)|.$$

(2) $$\varepsilon\, |\varphi_\nu'(a)| \frac{\varrho}{(1+\varrho)^2} \leqq |\varphi_\nu(b) - \varphi_\nu(a)|.$$

Angenommen, *die Vergrößerungsverhältnisse* $|f'(a_\nu)|$ *seien für alle Stellen der Sorte* a *beschränkt, etwa* $\leqq M$. Dann folgt aus (1) wegen $\varphi_\nu'(a) = f'(a_\nu)^{-1}$, daß eine solche Beschränktheit auch für jede Nachbarsorte b besteht. Und es folgt aus (2) für $\varrho \to 1$, daß jedes $\mathfrak{G}_\nu$ eine Kreisscheibe vom Radius $d = \frac{\varepsilon}{4M}$ um a_ν enthält; je zwei Stellen a_ν und a_μ haben daher mindestens den Abstand $2d$, woraus man für jedes $\lambda > \nu$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{-\lambda}$ erschließt.

Ein Lemma der Wertverteilungstheorie lehrt dann, daß die Anzahl $n(r, a)$ — und ebenso die Anzahlfunktion $N(r, a)$ — der a-Stellen im Kreise $|z| < r$ höchstens von der Wachstumsordnung 2 ist.

Da auch jede Sorte b aus der ε-Umgebung von a gewöhnlich ist und in ihr, wie bemerkt, die Vergrößerungsverhältnisse $|f'(b_\nu)|$ beschränkt sind, gilt für alle diese Sorten dasselbe, und daher auch — etwa nach dem II. Hauptsatz oder einem Satze von Ahlfors — für die Charakteristik $T(r, f)$.

Die Verzerrungen $|f'(a_\nu)|$ *können also in allen Stellen einer gewöhnlichen Sorte* a *nur dann beschränkt sein, wenn* $f(z)$ *die Ordnung 2 nicht übersteigt.* Die elliptischen Funktionen zeigen, daß diese Schranke genau ist.

Allgemeiner: Die Anzahl $n_M(r, a)$ jener Punkte der gewöhnlichen Sorte a, wo $|f'(a_\nu)| \leqq M$, ist höchstens von der Ordnung 2. Hat man nun eine Funktion von höherer Ordnung als 2, so ist für jede gewöhnliche Sorte auch die Anzahl aller a-Stellen $n(r, a)$ von höherer Ordnung und der Quotient aus den Anzahlen

$$n_M(r, a) : n(r, a)$$

strebt gegen 0 für $r \to \infty$. Mit andern Worten:

Sei $f(z)$ *eine meromorphe Funktion von höherer Ordnung als 2. Nach Vorgabe jedes beliebig großen* M *liegt in fast allen Stellen jeder gewöhnlichen Sorte* a *der Betrag der Ableitung oder das Vergrößerungsverhältnis* $|f'(a_\nu)|$ *oberhalb von* M.

Darin liegt eine präzise Antwort auf die eingangs beiläufig ausgesprochene Vermutung [1]).

Für Funktionen, die nur im Einheitskreis existieren, ist offenbar die schärfere Aussage möglich, daß *nur in endlich vielen Stellen jeder gewöhnlichen Sorte* $|f'(a_\nu)| \leqq M$ *gelten kann;* denn es lassen sich nur endlich viele Kreise vom Radius d im Einheitskreis unterbringen.

---

[1]) Den Gegenstand habe ich in einer Arbeit im Journal f. Mathematik, *166*, 1932, ausführlicher behandelt.

DIE INDEPENDENTE THEORIE GEWISSER FUNKTIONSKLASSEN

Von ANDREAS SPEISER, Zürich

Die Riemannsche Fläche liefert den besten Ausgangspunkt zur Aufstellung von Funktionsklassen, die man independent darstellen will. Das erste Beispiel einer solchen Darstellung bilden die Eisensteinschen Reihen für die elliptischen Funktionen, weitere Beispiele sind mit der Uniformisierung eng verknüpft. Man kann in ihnen die Verallgemeinerung der Galoisschen Gleichungstheorie auf die Funktionentheorie sehen.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine Riemannsche Fläche in der w-Ebene, welche nur über den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ logarithmische Verzweigung aufweist, sonst regulär ist und einfach zusammenhängend. Hierzu bilde man die Fläche $\mathfrak{G}$, welche in allen Blättern an diesen Stellen logarithmisch verzweigt ist. Dann läßt sich $\mathfrak{G}$ durch eine Funktion $w = m(z)$ auf die obere z-Halbebene abbilden und $m(z)$ ist automorph unter einer Gruppe $\mathfrak{A}$ von linearen gebrochenen Substitutionen. Die Fläche $\mathfrak{F}$ gehört zu einer Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$, und zwar ist sie vom hyperbolischen Typus, wenn die Summe der reziproken Werte der *Spannungen* (Quadratsumme der Koeffizienten) der Matrizen von $\mathfrak{B}$ konvergiert, sonst ist sie vom parabolischen Typus. Mit Hilfe von unendlichen Produkten lassen sich Funktionen $A(z)$ darstellen, welche unter $\mathfrak{B}$ automorph sind und die obere Halbebene auf einen Kreis oder auf die offene Ebene abbilden (Sätze von Koebe in den Acta math. 50). Mit Hilfe der Funktionen $m(z)$ und $A(z)$ ergibt sich die independente Darstellung der zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Funktionen.

ON FUNCTIONS REGULAR IN THE UNIT CIRCLE

By MARY L. CARTWRIGHT, Cambridge

Let $f(z)$ be regular for $|z| < 1$. By Carathéodory's well-known theorem

$$M(r) < \frac{R}{R-r}\,[2A(R) + 2f(0)], \quad (r < R \leqq 1),$$

where $A(r)$ is the maximum of the real part of $f(re^{i\theta})$, and $M(r) = \max |f(re^{i\theta})|$. If the real part of $f(z)$ is positive, this gives $M(r) = O(1-r)^{-1}$, and the function $(1-z)^{-1}$ shows that -1 cannot be replaced by $-\alpha$, where $\alpha < 1$. In the course

of a discussion which I had with Prof. Littlewood the question arose: what can we say about $M(r)$, if

$$A(r) = O[(1-r)^{-\alpha}] \qquad (\alpha > 0)?$$

Carathéodory's theorem only gives $M(r) = o(1-r)^{-\alpha-1}$, but a study of various special functions suggests the following theorem,

Theorem. If

$$A(r) = O[(1-r)^{-\alpha}], \textit{ then}$$
$$M(r) = O[(1-r)^{-1}] \quad \textit{if} \quad \alpha < 1,$$
$$M(r) = O[(1-r)^{-\alpha}[\quad \textit{if} \quad \alpha > 1.$$

It is sufficient to show that $f(z) = O(1-|z|)^{-1}$ as $z \longrightarrow 1$ along the real axis, and the result for $\alpha < \frac{1}{2}$ is easy to prove. For in that case, by adding $K(1-z)^{-1}$, where K is sufficiently large, we obtain a function whose real part is positive in the circle $|z - \frac{1}{2}| \leqq \frac{1}{2}$. Then Carathéodory's theorem gives the required result. A modification of this method shows that, for $\alpha \geqq 1$, $M(r) = O(1-r)^{-\alpha-\varepsilon}$ for every $\varepsilon > 0$.

A more difficult method, very similar to that which I have used for directions of Borel of integral functions proves the required result for the real part of $f(z)$, and the rest follows by a theorem on harmonic functions due to Hardy and Littlewood.

ÜBER DIE ENTWICKLUNGSKOEFFIZIENTEN EINER GEWISSEN KLASSE VON AUTOMORPHEN FORMEN

Von HANS PETERSSON, Hamburg

Es handelt sich um eine einheitliche Theorie der Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen auf ausschließlicher Grundlage der Theorie der automorphen Formen selber, d. h. ohne Hinzuziehung der Hardy-Littlewoodschen Methoden der additiven Zahlentheorie. Ich erläutere die wesentlichen Ergebnisse am Beispiel der Modulformen ganzer Dimension $-r \leqq -2$, welche zur Hauptkongruenzuntergruppe N-ter Stufe $\Gamma(N)$ der Modulgruppe $\Gamma(1)$ gehören. Es werden mit Rücksicht auf

die zahlentheoretischen Anwendungen zunächst nur solche Formen untersucht, welche im Innern $\mathfrak{H}$ der oberen Halbebene der komplexen Variablen τ regulär sind. Unter Entwicklungskoeffizienten sind dabei die Koeffizienten der Entwicklung der Modulform nach Potenzen der ortsuniformisierenden Variablen in einer der parabolischen Spitzen zu verstehen. Grundlage der Theorie ist die Tatsache, daß sich jede einzelne dieser Modulformen als Linearkombination von endlich vielen der Reihen

$$(1) \qquad G_{-r}(\tau; A, N; \nu) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A)} \frac{e^{2\pi i \frac{M\tau}{N}\nu}}{(m_1 \tau + m_2)^r}$$

darstellen läßt. Hier ist τ eine komplexe Variable mit positivem Imaginärteil, $r > 2$, $M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ ist die Matrix einer Substitution $M\tau = M(\tau)$ aus der Nebengruppe $A\Gamma(N)$, wo $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ eine gegebene Matrix aus $\Gamma(1)$ bezeichnet. $\mathfrak{S}(A)$ bedeutet ein volles System von Matrizen M aus $A\Gamma(N)$ mit verschiedenen zweiten Zeilen m_1, m_2. Im Falle $r = 2$ sind noch konvergenzerzeugende Faktoren anzubringen, die jedoch das Resultat nicht wesentlich beeinflussen.

Die Aufstellung der Potenzreihenentwicklung nach der ortsuniformisierenden Variablen in der Spitze ∞ für eine in $\mathfrak{H}$ reguläre Modulform ist damit auf die Aufgabe zurückgeführt, diese Funktionen $G_{-r}(\tau; A, N; \nu)$ in Fourierreihen zu entwickeln. Dabei ergibt sich im Falle $\nu = 0$, wo man es in $G_{-r}(\tau; A, N; 0)$ mit einer Eisensteinreihe zu tun hat, für die Entwicklungskoeffizienten $a_n = a_n(\nu)$ ein Ausdruck der Form $a_n = a_n(0) = C\, n^{r-1}\, \mathfrak{S}_r(n)$; C bezeichnet eine Konstante und $\mathfrak{S}_r(n)$ eine unendliche Reihe von derselben Struktur wie die singulären Reihen der additiven Zahlentheorie. Für $\nu \neq 0$ erhält man dagegen

$$(2) \qquad a_n(\nu) = C\, n^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1 (N) \\ m_1 \neq 0}} \frac{W_{m_1}(n, \nu)}{|m_1|} J_{r-1}\left(4\pi \frac{\sqrt{\nu}}{N} \frac{\sqrt{n}}{|m_1|}\right);$$

$W_{m_1}(n, \nu)$ ist eine Summe von $|m_1|$ Einheitswurzeln nach Art der Kloostermanschen Summen und J_{r-1} die Besselsche Funktion des Index $r - 1$. Zur genaueren Untersuchung der a_n benötigt man keineswegs ein neuartiges Abschätzungsverfahren, sondern nur Abschätzungen für die Kloostermanschen Summen und für die Besselfunktionen. So ergibt sich für $\nu > 0$, wo $G_{-r}(\tau; A, N; \nu)$ eine in allen parabolischen Spitzen verschwindende Modulform ist, unmittelbar eine Abschätzung

$$a_n(\nu) = O\left(n^{\frac{r}{2} - \frac{1}{8} + \varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Wenn dagegen $\nu < 0$, so besitzt $G_{-r}(\tau; A, N; \nu)$ in den zu $-\frac{a_2}{a_1}$ aequivalenten Spitzen je einen Pol der Ordnung ν, und unter $\sqrt{\nu}$ ist dann die negativ-imaginäre Wurzel $-i\,|\sqrt{\nu}\,|$ zu verstehen. Man erhält zunächst

$$(3)\quad a_n(\nu) = C n^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1 (N) \\ 0 < |m_1| \leq \sqrt{n}}} \frac{W_{m_1}(n, \nu)}{|m_1|} J_{r-1}\left(-4\pi i \frac{|\sqrt{\nu}\,|}{N} \frac{\sqrt{n}}{|m_1|}\right) + O\left(n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{8}+\varepsilon}\right)$$

und sieht sofort, daß das einzelne Glied der endlichen Summe sich wie

$$C_1 n^{\frac{r}{2}-\frac{3}{4}} e^{4\pi \frac{c\sqrt{n}}{|m_1|}} \quad \text{mit festem } c > 0$$

verhält, falls das zugehörige $W_{m_1}(n, \nu)$ nicht verschwindet. Eine einfache Ueberlegung zeigt weiter, daß jedenfalls eine Abschätzung

$$a_n(\nu) = C_2 n^{\frac{r}{2}-\frac{3}{4}} e^{c_1\sqrt{n}} \left(1 + O n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

mit festem $c_1 > 0$ für die n einer gewissen arithmetischen Progression nach einem festen Modul besteht. Diese Resultate über die Fälle $\nu < 0$ lassen sich sofort auf die Fourierkoeffizienten einer Linearkombination von solchen Reihen $G_{-r}(\tau; A, N; \nu)$ mit lauter $\nu < 0$ ausdehnen. Für die Entwicklungskoeffizienten c_n einer allgemeinen in $\mathfrak{H}$ regulären Modulform erhält man eine Darstellung

$$(4)\qquad c_n = L_n + n^{r-1} \mathfrak{S}_r^*(n) + O\left(n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{8}+\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

wo L_n linear mit konstanten Koeffizienten aus endlich vielen der endlichen Summen über m_1 zusammengesetzt ist, wie sie auf der rechten Seite von (3) angegeben sind, und $\mathfrak{S}_r^*(n)$ wieder eine singuläre Reihe bezeichnet. Der Fall $r = 2$ ist besonders interessant, weil man aus den hier bewiesenen Sätzen durch Integration der Modulformen nach $d\tau$ Aussagen über die Entwicklungskoeffizienten eines in $\mathfrak{H}$ regulären allgemeinen Abelschen Integrals 3. Gattung der $\Gamma(N)$ erhält. Die ganze Theorie ist in weitem Umfange auf beliebige Untergruppen der Modulgruppe und sogar auf allgemeine Grenzkreisgruppen übertragbar. An dem allgemeinen Resultat ist einerseits die Analogie mit der Hardy-Ramanujanschen Formel für die Anzahl der Partitionen von Interesse, andererseits die Tatsache, daß man die Entwicklungskoeffizienten c_n einer ganz allgemeinen Klasse analytischer Funktionen mit großer Genauigkeit durch ein Aggregat von $[\sqrt{n}\,]$ Gliedern relativ einfacher Bauart darstellen kann, wenn man über die Funktionalbeziehungen und die Regularitätseigenschaften dieser Funktionen Genaueres weiß.

LE TERME RESTE DE LA SÉRIE DE TAYLOR GÉNÉRALISÉE

Par RODOLPHE RACLIS, Bucarest

M. W. Gontcharoff (Annales Ec. Normale Sup., 1930, pag. 1—78) appelle série d'Abel généralisée et MM. S. Takenaka et S. Kakeia (Proc. Physico-Math. Soc. of Japan, 1931, pag. 111—132 ; 1932, pag. 179—196 et 1932, pag. 125—138) appellent série de Taylor généralisée, la série qui procède suivant les polynômes de la suite $\{P_n(z)\}$, formés à partir d'une suite de nombres $\{a_n\}$ et où le polynôme $P_n(z)$ satisfait aux conditions caractéristiques

$$P_n^{(k)}(a_k) = 0, \ (k = 0, 1, \ldots, n-1); \ P_n^{(n)}(a_n) = 1.$$

Je montre que les polynômes $\{P_n(z)\}$ satisfont à la relation de récurrence

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(a_k - z)^{n-k}}{(n-k)!} P_k(z) = 0 \tag{1}$$

d'où l'on déduit l'expression de $P_n(z)$ sous la forme d'un déterminant d'ordre n.

Lorsque $\varphi(z)$ est un polynôme de degré n, on a

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(a_k) P_k(z)$$

et je montre à l'aide de (1) que, lorsque $f(z)$ est une fonction qui admet une dérivée d'ordre $(n+1)$, on a

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a_k) P_k(z) + T_{n+1} \tag{2}$$

où le terme reste T_{n+1} a l'expression

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} P_k(z) \int_{a_k}^{z} \frac{(a_k - s)^{n-k}}{(n-k)!} f^{(n+1)}(s)\, ds \tag{3}$$

qui peut s'écrire encore

$$T_{n+1} = \int_{a_0}^{z} \Pi_n(z, s) f^{(n+1)}(s)\, ds$$

où la fonction $\Pi_n(z, s)$ jouit de la propriété, qu'on peut diviser le chemin d'intégration en $(n+1)$ chemins partiels, le long de chacun desquels, $\Pi_n(z, s)$ est égal à un certain polynôme en z et s, mais de degré n au plus. Au fond, en écrivant T_{n+1} sous la forme (3), j'ai réduit une certaine intégrale multiple d'ordre $(n+1)$ à une somme de $(n+1)$ intégrales simples.

Dans le cas de la série de Taylor, $a_k = a$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, la formule (3) devient

$$T_{n+1} = \int_a^z \frac{(z-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(s)\, ds$$

et dans le cas de la série d'Abel, $a_k = a + kb$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(z-a)(z-a-kb)^{k-1}}{k!} \int_{a+kb}^{z} \frac{(a+kb-s)^{n-k}}{(n-k)!} f^{(n+1)}(s)\, ds$$

ou encore

$$T_{n+1} = \int_a^z \frac{(z-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(s)\, ds + \sum_{k=1}^{n} \frac{(z-a)(z-a-kb)^{k-1}}{k!} \int_{a+kb}^{a} \frac{(a+kb-s)^{n-k}}{(n-k)!} f^{(n+1)}(s) ds.$$

Pour donner une application, je montre que la détermination de l'intégrale d'une équation différentielle linéaire d'ordre $(n+1)$, avec les conditions initiales

$$y(a_0) = C_0, \quad y'(a_1) = C_1, \quad \ldots, \quad y^{(n)}(a_n) = C_n,$$

se réduit à une équation intégrale Fredholm et c'est la formule (2) qui réalise cette réduction.

TROIS THÉORÈMES SUR LA SÉRIE DE TAYLOR

Par RODOLPHE RACLIS, Bucarest

Soit $\varphi(x)$ une fonction complexe de la variable réelle x, qui tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$ et qui admet une dérivée d'ordre $(m+1)$, continue pour $x \geqq a$.

Théorème I. *Si* $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1+\varepsilon} \varphi^{(m+1)}(x) = 0$, $\varepsilon > 0$ *et* $\alpha > 0$, $0 \leqq h < \alpha$, *la série de Taylor de la variable complexe* k,

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-k)^r \varphi(x + h + r\alpha) \tag{1}$$

est convergente en tous les points du cercle $|k| = 1$, *frontière comprise, excepté le seul point* $k = -1$.

Pour la démonstration j'utilise la formule sommatoire (95) de mon Mémoire des Acta Mathematica, t. 55, 1930, pag. 277—394 et je trouve pour la somme de la série (1), au facteur $(k+1)$ près, l'expression

$$\sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h)}{\nu\,!} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}_m(h-t)}{m\,!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Théorème II. *Si* $\lim\limits_{x \to \infty} x^{p+\varepsilon} \varphi^{(m+1)}(x) = 0$, $\varepsilon > 0$ et $\alpha_i > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$, $0 \leqq h < \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$, *la série de Taylor, multiple d'ordre* p, *des variables complexes* k_i,

$$\sum (-k_1)^{r_1} (-k_2)^{r_2} \ldots (-k_p)^{r_p} \varphi(x + h + r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_p\alpha_p), \tag{2}$$

où le signe $\sum$ *s'étend à toutes les valeurs entières, non négatives des* r_i, *est convergente en tous les points des cercles* $|k_i| = 1$, *frontières comprises, excepté le seul point* $k_1 = k_2 = \ldots = k_p = -1$.

Pour la démonstration j'utilise la formule sommatoire (124) et je trouve pour la somme de la série (2), au facteur $(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_p+1)$ près, l'expression

$$\sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu\,!} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m\,!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Théorème III. *Si* $\lim_{x \to \infty} x^{p+q+\varepsilon} \varphi^{(m+1)}(x) = 0$, $\varepsilon > 0$ *et* $\alpha_i > 0$, $\beta_j > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q)$, $0 \leqq h < \alpha_1 + \ldots + \alpha_p + \beta_1 + \ldots + \beta_q$, *la série multiple d'ordre* $(p+q)$,

$$(3) \sum (-k_1)^{r_1} (-k_2)^{r_2} \ldots (-k_p)^{r_p} \varphi(x + h + r_1 \alpha_1 + \ldots + r_p \alpha_p + s_1 \beta_1 + \ldots + s_q \beta_q)$$

où le signe Σ *s'étend à toutes les valeurs entières, non négatives des* r_i *et* s_j, *est convergente en tous les points des cercles* $|k_i| = 1$, *frontières comprises, excepté le seul point* $k_1 = k_2 = \ldots = k_p = -1$, *si une condition supplémentaire est satisfaite, concernant la convergence d'une certaine intégrale.*

Pour la démonstration j'utilise ma formule sommatoire (128) avec les expressions (138) et (139) des termes complémentaires et je trouve en même temps la somme de la série (3).

Remarques. 1° Si on se borne aux domaines intérieurs aux cercles $|k_i| = 1$, frontières exclues, les séries (1), (2), (3) sont convergentes dans des conditions plus larges concernant $\varphi^{(m+1)}(x)$.

2° Le cas $\alpha_i < 0$ et $|k_i| > 1$ se ramène au cas $\alpha_i > 0$ et $|k_i| < 1$.

3° M. Nörlund a démontré que la série (1) est convergente au point $k = 1$ (Acta Mathematica, t. 44, 1922, pag. 71—212), la série (2) est convergente au point $k_1 = k_2 = \ldots = k_p = 1$ et la série (3) pour $p = 0$ (Trans. Amer. Math. Soc. vol. 25, 1923, pag. 13—98).

SUR L'ÉQUIVALENCE PSEUDO-CONFORME DE DEUX HYPERSURFACES DE L'ESPACE DE DEUX VARIABLES COMPLEXES

Par ÉLIE CARTAN, Paris

1. H. Poincaré, étudiant en 1907 le problème de la représentation analytique, ou *pseudo-conforme,* de deux domaines de l'espace de deux variables complexes x, y, a montré qu'une hypersurface analytique de cet espace admet une infinité d'invariants différentiels par rapport au groupe infini des transformations analytiques $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$. La détermination effective de ces invariants est en relation, comme l'a montré B. Segre en 1931, avec celle, effectuée par A. Tresse, des invariants d'une

équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} = \omega\ (x, y, \frac{dy}{dx})$ par rapport au même groupe infini. Les deux problèmes ne sont cependant pas identiques. Dans un mémoire paru dans le dernier fascicule des *Annali di Matematica,* j'ai résolu directement le problème de Poincaré en lui appliquant une méthode générale remontant à 1908.

Le point de départ est le suivant. Soit Σ une hypersurface analytique ; les coordonnées x, y d'un point de Σ, exprimées comme fonctions analytiques de trois paramètres réels u, v, w, peuvent être regardées comme les intégrales premières d'un système différentiel

$$(1) \qquad \frac{du}{U_1 + iU_2} = \frac{dv}{V_1 + iV_2} = \frac{dw}{W_1 + iW_2},$$

U_1, U_2, . . ., W_2 étant des fonctions analytiques réelles de u, v, w. Ce système contient toutes les propriétés pseudo-conformes de Σ, car le passage de x, y à un autre système x', y' d'intégrales premières se fait par une transformation analytique. Le problème de Poincaré revient alors à la recherche des invariants différentiels de (1) par rapport au groupe infini des transformations analytiques réelles effectuées sur u, v, w. On a une première prise sur le système en remarquant que, de toutes les relations linéaires en du, dv, dw qui se déduisent de (1), une et une seule est à coefficients réels. Cette relation est covariante à (1) ; si elle est complètement intégrable, l'hypersurface est un *hyperplanoïde,* lieu à un paramètre de surfaces caractéristiques.

Des résultats généraux obtenus, je signale seulement le suivant :

Le plus grand groupe pseudo-conforme d'une hypersurface analytique est engendré par des transformations infinitésimales.

2. Les hypersurfaces, non hyperplanoïdes, les plus intéressantes sont celles qui admettent un groupe pseudo-conforme transitif. Le problème de leur détermination peut être envisagé du point de vue local ou du point de vue global. Du premier point de vue, le groupe est soit à 8 paramètres (hypersphère $x\bar{x} + y\bar{y} = 1$), soit à 3 paramètres. Du second point de vue, les résultats sont différents ; il peut dans ce cas être traité par une méthode directe, qui le réduit essentiellement à un problème relatif à la *structure* des groupes à 3 paramètres réels. Je ne puis ici que signaler les résultats suivants :

1° *Toute hypersurface non localement équivalente à l'hypersphère et admettant globalement un groupe transitif est globalement équivalente à l'une des hypersurfaces suivantes ou à une de leurs variétés de recouvrement:*

(Σ_1) $y_2 = x_2^m$, avec $x_2 > 0$ $(|m| \geqq 1,\ m \neq 1, 2)$;

(Σ_2) $y_2 = e^{\frac{x_2}{y_2}}$;

(Σ_3) $x_2^2 + y_2^2 = e^{2m \operatorname{arc\,tg} \frac{y_2}{x_2}}$;

(Σ_4) $1 + x\bar{x} - y\bar{y} = m\,|1 + x^2 - y^2|$, avec $\dfrac{x(1+\bar{y}) - \bar{x}(1+y)}{i} > 0$ $(m > 1)$;

(Σ_5) $x\bar{x} + y\bar{y} - 1 = m\,|x^2 + y^2 - 1|$ (sauf les points réels) $(-1 < m < 0$ ou $0 < m < 1)$;

(Σ_6) $x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z} = m\,|x^2 + y^2 + z^2|$ $(m > 1)$.

L'hypersurface (Σ_6) est rapportée à des coordonnées homogènes; quant aux autres, on a posé $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, $\bar{x} = x_1 - ix_2$, $\bar{y} = y_1 - iy_2$.

Toutes ces hypersurfaces admettent un groupe homographique à coefficients réels.

2° *Les hypersurfaces localement, mais non globalement, équivalentes à l'hypersphère, et admettant un groupe transitif, sont*

a) *l'hypersphère privée d'un de ses points ;*

b) $y\bar{y} = e^{x\bar{x}}$;

c) $y_2 = e^{x_2}$;

d) $x\bar{x} + (y\bar{y})^m = 1$, sauf $y = 0$ $(m > 0)$;

e) *l'hypersphère* $x\bar{x} + y\bar{y} = 1$, *où l'on regarde comme identiques deux points* (x, y) *et* $(\varepsilon x, \varepsilon y)$, *où* $\varepsilon^n = 1$ (*n entier fixe*);

f) $y_2 = x_2^2$ $(x_2 > 0)$;

g) *l'hypersphère* $x\bar{x} + y\bar{y} = 1$ *privée de ses points réels, ainsi que ses différentes variétés de recouvrement.*

L'hypersurface a) admet un groupe à 5 paramètres, les hypersurfaces b), c), d) et e) un groupe à 4 paramètres, les hypersurfaces f) et g) un groupe à 3 paramètres.

SUR LES TRANSFORMATIONS PSEUDO-CONFORMES DES DOMAINES CERCLÉS BORNÉS

Par HENRI CARTAN, Strasbourg

Notations: 2 variables complexes $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$. Dans l'espace (x_1, x_2, y_1, y_2), on ne considère que des domaines *ouverts*, constitués de points à distance finie.

Une transformation *pseudo-conforme* d'un domaine D en un domaine D' est, par définition, une transformation de la forme

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y) \tag{1}$$

(f et g étant des fonctions analytiques holomorphes dans D), qui établit une correspondance biunivoque entre les points intérieurs de D et ceux de D'. (On ne suppose rien sur la correspondance entre les frontières.)

Problème fondamental (A). — Etant donnés deux domaines D et D', 1⁰ reconnaître s'ils peuvent être mis en correspondance pseudo-conforme (c'est impossible, *en général,* même si D et D' sont bornés et simplement connexes); — 2⁰ dans l'affirmative, déterminer *toutes* les transformations pseudo-conformes de D en D'. — Pour résoudre 2⁰, il suffit de résoudre le

Problème fondamental (B). — Etant donné un domaine D, déterminer *toutes* les transformations pseudo-conformes de D en lui-même.

Nous voulons indiquer ici la solution des problèmes (A) et (B) dans le cas où tous les domaines envisagés sont *cerclés* et *bornés.* Un domaine D est *cerclé* s'il admet les transformations suivantes en lui-même

$$x' = xe^{i\theta}, \quad y' = ye^{i\theta} \quad (\theta \text{ prenant toutes les valeurs réelles}); \tag{2}$$

ces transformations laissent fixe l'origine ($x = y = 0$) qui est supposée intérieure à D et s'appelle le *centre* du domaine D. La solution des problèmes (A) et (B), pour les domaines cerclés bornés, est constituée par la succession des théorèmes suivants, qui marquent l'aboutissement de travaux de Reinhardt, Carathéodory, Kritikos, Behnke, Welke, Thullen, E. et H. Cartan:

Théorème 1. — Toute transformation pseudo-conforme d'un domaine cerclé borné D en un domaine cerclé D', qui fait correspondre les centres de D et D', est nécessairement une affinité

$$x' = ax + by, \quad y' = a'x + b'y. \tag{3}$$

Théorème 1bis. — Toute transformation pseudo-conforme d'un domaine de Reinhardt borné [1]) D en un domaine de Reinhardt D', qui fait correspondre les centres de D et D', a nécessairement la forme

$$x' = ax, \quad y' = by \tag{4}$$

ou la forme

$$x' = ay, \quad y' = bx\,;$$

il y a exception si chacun des domaines D et D' peut se déduire de l'hypersphère

$$|x|^2 + |y|^2 < 1 \tag{5}$$

au moyen d'une transformation de la forme (4).

Théorème 2. — Un domaine cerclé borné D n'admet pas de transformations pseudo-conformes en lui-même, laissant fixe le centre, si ce n'est les transformations (2), éventuellement combinées avec un nombre fini de substitutions linéaires unimodulaires. Il y a exception si D peut se déduire d'un domaine de Reinhardt au moyen d'une transformation de la forme (3).

Théorème 2bis. — Un domaine de Reinhardt borné D n'admet pas de transformations pseudo-conformes en lui-même, laissant fixe le centre, si ce n'est les transformations de définition

$$x' = x\,e^{i\theta_1}, \quad y' = y\,e^{i\theta_2},$$

éventuellement combinées avec une transformation de la forme

$$x' = Ry, \quad y' = \frac{1}{R}\,x.$$

Il y a exception si D peut se déduire de l'hypersphère (5) par une transformation de la forme (4).

Théorème 2ter. — Les transformations pseudo-conformes de l'hypersphère (5) en elle-même, qui laissent fixe le centre, sont constituées par les substitutions linéaires, de la forme (3), qui laissent invariante la forme d'Hermite $x\bar{x} + y\bar{y}$; ces substitutions dépendent de 4 paramètres réels.

---

[1]) Un domaine de Reinhardt est caractérisé par le fait d'admettre les transformations suivantes en lui-même

$$x' = x\,e^{i\theta_1}, \quad y' = y\,e^{i\theta_2}$$

(θ_1 et θ_2 prenant indépendamment toutes les valeurs réelles); ces transformations laissent fixe l'origine $x = y = 0$ (centre du domaine) qui est supposée intérieure au domaine. Les domaines de Reinhardt sont donc des domaines cerclés d'un type particulier.

Théorème 3. — Pour que deux domaines cerclés bornés D et D' puissent être mis en correspondance pseudo-conforme, il faut et il suffit que l'on puisse établir entre eux une correspondance de la forme (3). Pour résoudre complètement le problème (A), il suffit alors de résoudre le problème (B).

Théorème 4. — Sauf les 2 cas d'exception ci-après, un domaine cerclé borné D n'admet pas de transformations pseudo-conformes en lui-même, si ce n'est celles qui laissent fixe son centre (pour ces dernières, voir les théorèmes 2, 2bis et 2ter).

Cas d'exception. — 1⁰ D se déduit d'un domaine

$$(D_a) \qquad |x|^2 + |y|^a < 1 \qquad (a \text{ positif et fini})$$

par une transformation de la forme (3);

2⁰ D se déduit d'un domaine

$$(\varDelta_\alpha) \quad |x| < 1, \quad |y| < 1, \quad \left|\frac{y-x}{1-\bar{x}y}\right| < \alpha \ (\alpha \text{ positif, fini ou infini})$$

par une transformation de la forme (3).

Dans chacun de ces cas, le problème B peut se résoudre effectivement. Pour D_a, il faut distinguer le cas $a = 2$ (*hypersphère,* dont les transformations sont homographiques et dépendent de 8 paramètres) et le cas $a \neq 2$ (les transformations de D_a en lui-même dépendent alors de 4 paramètres). Pour $\varDelta_\alpha$, on distingue le cas $\alpha = \infty$ (*dicylindre,* dont les transformations, bien connues, dépendent de 6 paramètres) et le cas où α est fini (les transformations de $\varDelta_\alpha$ en lui-même dépendent alors de 3 paramètres).

ZUR FUNKTIONENTHEORIE ZWEIER KOMPLEXER VERÄNDERLICHER

Von STEFAN BERGMANN, Berlin

In der Arbeit „Ueber die Kernfunktion eines Bereiches . . . . I."[1]) wurde die Kernfunktion $K_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)$ eines Bereiches $\mathfrak{B}$ eingeführt und ihr Verhalten am Rande untersucht.

---

[1]) Crelles Journal f. reine u. ang. Mathematik 169 (1932/3) S. *69* vgl., auch Jahresbericht deut. Math.-Ver. 41 (1932) S. *78—80*. Die im folgenden angegebenen Paragraphennummern beziehen sich auf die erste Arbeit.

Wie ebenda gezeigt ist, kann man mit Hilfe der Kernfunktion zu jedem Bereich $\mathfrak{B}$ eine gegenüber analytischen Transformationen $z_k^* = f_k(z_1, z_2)$, $[k = 1, 2]$ invariante Hermitesche Metrik konstruieren. Mit dem Krümmungstensor dieser Metrik hängt die (im allgemeinen nicht konstante) Invariante

$$(1) \qquad I_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{K_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\begin{vmatrix} T_{1\bar{1}} & T_{2\bar{1}} \\ T_{1\bar{2}} & T_{2\bar{2}} \end{vmatrix}}, \quad \left(T_{m\bar{n}} \equiv \frac{\partial^2 \ln K_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\partial z_m \, \partial \bar{z}_n}\right)$$

aufs engste zusammen. (§ 1)

Ueber das Verhalten der Invariante (1) bezw. der Minimalfunktion

$$(2) \qquad M_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2) = \frac{K_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}{K_{\mathfrak{B}}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}$$

bei der Annäherung zu einem Randpunkt Q des Bereiches $\mathfrak{B}$ gelten die folgenden Sätze:

Bei der Annäherung an gewisse Limespunkte (Q_3) dritter Ordnung (die im § 5 näher beschrieben sind) gilt:

$$(3) \qquad \lim_{(z_1, z_1) \to Q_3} I_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{2}{9\pi^2}.$$

Bei der Annäherung an eine Kategorie von Limespunkten (Q_2) zweiter Ordnung (näher beschrieben in der zweiten Hälfte des § 6) gilt:

$$(4) \qquad \lim_{(z_1 z_2) \to Q_2} I_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2}.$$

Unter Benutzung der in bezug auf den Randpunkt Q normalen Koordinaten[2]) gilt:

Bei der Annäherung an Q_3:

$$(5) \qquad \lim_{n \to \infty} n^{3-3p} M_{\mathfrak{B}}\left(\frac{z_1}{n^p}, \frac{z_2}{n^p}; \frac{\bar{t}_1}{n}, \frac{\bar{t}_2}{n}\right) = \frac{(t_1 + \bar{t}_1)^3}{z_1^3}, \quad 2 - \frac{1}{\nu} < p < 2,$$

[2]) Die Randpunkte Q_3 bzw. Q_2 haben die Eigenschaft, daß die Randhyperfläche in dem betreffenden Punkte einen linearen Tangentialraum $\mathfrak{h}$ besitzt. Unter dem für den Randpunkt Q normalen Koordinatensystem versteht man ein solches, bei welchem $z_1 = 0$ mit derjenigen analytischen Ebene, die in $\mathfrak{h}$ liegt und durch den Punkt Q durchgeht, zusammenfällt, während $z_2 = 0$ die dazu orthogonale, durch den Punkt Q durchgehende analytische Ebene ist.

Bei der Annäherung an Q_2:

$$\lim_{n\to\infty} n^{2-2p} M_{\mathfrak{B}}\left(\frac{z_1}{n^p}, z_2; \frac{\bar{t}_1}{n}, \bar{t}_2\right) = \frac{(t_1+\bar{t}_1)^2 (1-|t_2|^2)^2}{z_1^2 (1-z_2\bar{t})^2}, \quad 1-\frac{1}{2\nu}<p<1,$$

wo ν eine von der Struktur des Bereiches $\mathfrak{B}$ abhängige Konstante ist. (n reell)

Ein Anwendungsbeispiel der angegebenen Metrik stellt der folgende Satz dar: Sei $f(z_1, z_2)$ eine in $\mathfrak{B}$ meromorphe Funktion und $\int_{\mathfrak{B}} (\ln |f(z_1, z_2)|)^2 d\omega = F < \infty$. Seien $n_k(z_1, z_2)$ $[k = 1, 2, \ldots l]$ Null-, $p_k(z_1, z_2)$ $[k = 1, 2, \ldots r]$ Polfunktionen von $f(z_1, z_2)$, so daß also $\dfrac{f(z_1, z_2)\, \Pi p_k(z_1, z_2)}{\Pi n_k(z_1, z_2)}$ eine in $\mathfrak{B}$ reguläre, nirgends verschwindende Funktion ist. Es gibt dann eine nur von $\mathfrak{B}$ abhängige reelle Funktion $\varkappa(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$, eine Funktion $\sigma(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ und eine Konstante S, die nur von $\mathfrak{B}$ und $n_k(z_1, z_2)$ bezw. $p_k(z_1, z_2)$ abhängen, so daß für $f(z_1, z_2)$ in $\mathfrak{B}$ die Ungleichung

$$(6)\quad \left[\frac{1}{\varkappa(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}\right]^{\sqrt{F-S}} \sigma(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \left|\frac{\Pi n_k(z_1, z_2)}{\Pi p_k(z_1, z_2)}\right| \leqq |f(z_1, z_2)| \leqq$$

$$\leqq [\varkappa(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)]^{\sqrt{F-S}} \sigma(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \left|\frac{\Pi n_k(z_1, z_2)}{\Pi p_k(z_1, z_2)}\right|$$

gilt.

Zweites Beispiel: Bedeute $A(\psi)$ die untere Grenze der Werte des Integrals $\int_{\mathfrak{B}} |1-\nu(z_1, z_2)\, \psi(z_1, z_2)|^2 d\omega$, wenn für ν alle in $\mathfrak{B}$ regulären, und dort nirgends verschwindenden Funktionen zur Konkurrenz herangezogen werden. Ferner sei $\psi_k(z_1, z_2)$ eine (unendliche) Folge von in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen, die gewissen einfachen Bedingungen genügen, und es gäbe eine (ganze) Zahl p ($\geqq 0$), sodaß $\sum_{k=1}^{\infty} [A(\psi_k)]^{\frac{p+1}{2}}$ konvergiert. Man kann dann zu jedem ψ_k eine in $\mathfrak{B}$ reguläre und dort nirgends verschwindende Funktion ν_k so konstruieren, daß

$$(7)\qquad \prod_{k=1}^{\infty} [\nu_k \psi_k e^{B_k}], \qquad B_k = \sum_{n=1}^{n=p} \frac{1}{n} (1-\nu_k \psi_k)^n$$

in $\mathfrak{B}$ regulär ist und in $\mathfrak{B}$ auf den Flächen $\psi_k(z_1, z_2) = 0$ und nur dort verschwindet.

Eine ausführliche Darstellung dieser Sätze erscheint in den Arbeiten „Ueber die Kernfunktion ... II“. (Crelles Journal) und „Ueber die Nullstellen einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen“ (Proc. kon. Akad. v. Wet. te Amsterdam).

CONFORMALITY IN CONNECTION WITH FUNCTIONS OF TWO COMPLEX VARIABLES

By EDWARD KASNER, New York

In the theory of functions of two complex variables $z = x + iy$, $w = x' + iy'$, the transformations of importance are of the form $Z = \varphi(z, w)$, $W = \psi(z, w)$, where φ and ψ are general analytic functions. In the fourdimensional space with cartesian coordinates x, y, x', y', these transformations are not conformal, and Poincaré in his paper in the *Palermo Rendiconti* (1917) employs (provisionally) the term regular. I obtain several geometric characterizations of the regular transformations. Two linear systems of planes are converted into themselves and only the angles situated in these planes are left invariant. The family of surfaces affected conformally is easily derived. The simplest characteristic invariant (pseudo-angle) is connected with the intersection of a line with a three-dimensional variety. In conclusion certain finite sub-groups are considered: the 9-parameter conformal group, the linear, and the linear fractional groups.

ÜBER FUNKTIONEN QUATERNIONALER VERÄNDERLICHEN

Von E. KOLMAN, Moskau

Die Nichtkommutativität der Multiplikation in der Hamiltonschen Quaternionenalgebra hat zur Folge, daß, den Trivialfall der linearen Funktionen ausgenommen, es in diesem Gebiete keinen Differentialquotienten gibt, was die Hauptursache dafür bildet, daß die Entwicklung der Quaternionenlehre im großen und ganzen stocken geblieben ist. R. Fueter hat in Com. math. Helvet. v. 4 den Begriff der analytischen Funktion auf das Quaternionengebiet dadurch zu erweitern versucht, daß er die Riemann-Cauchyschen Differentialgleichungen durch ein anderes Gleichungssystem ersetzt.

Abgesehen davon, daß auch andere Gleichungssysteme gewählt werden können, kann man einen prinzipiell anderen Weg einschlagen, und zwar nicht von Newton-Leibnitz und Cauchy, sondern von Lagrange und Weierstraß ausgehend. Man definiert nämlich die analytische Funktion der Quaternionenveränderlichen durch eine „Potenzreihe“

$\mathfrak{P}(u) = a_0 + \Sigma a_1 u a_1' + \Sigma a_2 u a_2' u a_2'' + \ldots$, verzichtet auf den Differentialquotienten und läßt nur die „Ableitung“ $\mathfrak{P}'(u) = \Sigma a_1 a_1' + \Sigma a_2 a_2' u a_2'' + \Sigma a_2 u a_2' a_2'' + \ldots$ gelten. Diese Scheidung zwischen Differentialquotienten und Ableitung, die an und für sich methodologisch interessant ist, führt weiter z. B. dazu, daß Funktionen gebildet werden können, die mit der eigenen Ableitung identisch sind. Es ist auch nicht schwer, z. B. durch Analogie mit den Poincaréschen Reihen, eindeutige Funktionen zu bilden, die im Gegensatz zum komplexen Gebiet, 4 wesentliche Perioden besitzen.

An diese Festlegung des Begriffes der analytischen Funktionen der quaternionalen Veränderlichen knüpfen zwei Probleme an: 1. die Integralsätze für sie zu entwickeln; 2. sie in Verbindung mit der Differentialgeometrie, wie sie von Schouten und Struik betrieben wird, in Verbindung zu bringen und zu versuchen in der Quantenmechanik anzuwenden.

ITERATIVE ALGORITHMEN

Von HARALD GEPPERT, Gießen

Sind a, b zwei komplexe Zahlen und bildet man den Iterationsalgorithmus $a_1 = f(a, b)$, $b_1 = \varphi(a, b) \ldots a_n = f(a_{n-1}, b_{n-1})$, $b_n = \varphi(a_{n-1}, b_{n-1}) \ldots$, so wird die Grenzfunktion $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = M(a, b)$ untersucht, falls sie existiert. Vorausgesetzt wird, daß f und φ homogen vom Gewichte 1 in ihren Argumenten, regulär analytisch in $\frac{b}{a}$ und $f(a, a) = \varphi(a, a) = a$ seien. Dann kann man $a = 1$, $b = 1 + z$ setzen und den Algorithmus in seiner Abhängigkeit von der komplexen Variablen z untersuchen, indem man $F(z) = f(1, 1 + z)$, $\Phi(z) = \varphi(1, 1 + z)$ setzt. Sind die Potenzreihen für $F(z)$ und $\Phi(z)$ die folgenden

$$F(z) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots, \quad \Phi(z) = 1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots,$$

so zeigt sich

1) Ist $|\alpha_1 - \beta_1| < 1$, so konvergiert der Algorithmus in einer bestimmten Umgebung von $z = 0$ gleichmäßig gegen eine regulär-analytische Grenzfunktion.

2) Ist $|\alpha_1 - \beta_1| > 1$, so kann der Algorithmus in der Umgebung von Null überhaupt nicht konvergieren.

3) Ist $|\alpha_1 - \beta_1| = 1$, und der Konvergenzradius einer der obigen Potenzreihen endlich, so tritt ebenfalls Divergenz des Algorithmus in der Umgebung von Null ein.

Besonders interessant ist der Fall $\alpha_1 = \beta_1$, der beim Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels, des Borchardtschen Mittels und vielen anderen bisher untersuchten Iterationsalgorithmen vorliegt; er garantiert die Erhaltung der ersten 2^n Glieder in den Potenzreihen-Entwicklungen von a_n, a_{n+1}, ... und eine überaus starke Konvergenz des Algorithmus in der Umgebung von $z = 0$.

Zur Frage des Konvergenzgebietes eines beliebigen Algorithmus und des Zusammenhanges der Singularitäten der Grenzfunktion mit denen der Ausgangsfunktionen werden Beiträge geliefert. (Ausführlicher in den Math. Ann.)

ÜBER DAS ZENTRUMPROBLEM IN DER THEORIE DER KONFORMEN ABBILDUNG

Von HUBERT CREMER, Köln

Der Punkt $z = 0$ heißt ein „Zentrum" der durch

$$z' = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad |a_1| = 1$$

gelieferten konformen Abbildung (wobei z' wieder in der z-Ebene zu denken ist), wenn es eine schlichte Abbildung $w = S(z)$ einer Umgebung von $z = 0$ so gibt, daß die „Schrödersche Funktionalgleichung"

$$f(z) = S^{-1}(a_1 \cdot S(z))$$

befriedigt wird, wenn also die konforme Abbildung f der Umgebung von $z = 0$ durch S in eine Drehung transformiert wird. Besitzt f ein Zentrum, so heiße f eine „Zentrumfunktion".

In diesem Vortrage wird mit Hilfe eines Satzes von Herrn Pólya über Potenzreihen mit verschwindender unterer Koeffizientendichte gezeigt, daß unter den einer ganzen rationalen Zentrumfunktion zugeordneten Zentrumfunktionen (das sind die, welche zur gleichen Schröderschen Funktion S gehören) die Menge derjenigen, die in ihrem ganzen Verlaufe eindeutig sind, die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Weiter werden neue Bedingungen gewonnen, deren Erfülltsein durch f für die Unlösbarkeit der Schröderschen Funktionalgleichung hinreichend ist.

ÜBER DIE KONFORME ABBILDUNG DURCH DIE BESSELFUNKTIONEN

Von JOSEF LENSE, München

Es wird die durch die Besselfunktion $w = J_\nu(z)$ vermittelte konforme Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene für reelle Werte des Zeigers $\nu > -1$ untersucht. Diese Beschränkung erweist sich vorläufig mangels genauerer Kenntnisse über die Nullstellen von $J'_\nu(z)$ für $\nu < -1$ als notwendig. Für ganzzahlige n fällt sie selbstverständlich wegen der Beziehung

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

weg.

Es werden die Kurven $|w| = \text{const.}$ gezeichnet und der Aufbau der Riemannschen Fläche besprochen. Als Beispiele werden die Fälle $\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \frac{18}{5}$ durchgeführt. Um auch ein Bild für die zu erwartenden Verhältnisse bei negativen Zeigern zu erhalten, werden die Fälle $\nu = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$ behandelt, weil hier $J_\nu(z)$ eine rationale Funktion von e^{iz} und $\sqrt{z}$ ist wie in allen Fällen, wo sich der Zeiger ν um $\frac{1}{2}$ von einer ganzen Zahl unterscheidet.

Es werden folgende Sätze bewiesen:

$J'_\nu(z)$ hat im Intervall $-k-1 < \nu < -k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ für mindestens einen Wert von ν je eine Doppelnullstelle bei $z = \pm \nu$. In anderen Punkten sind Doppelnullstellen ausgeschlossen, Nullstellen höherer als zweiter Ordnung überhaupt unmöglich. In der Umgebung von $z = 0$ und $\nu = -k$ hat $J'_\nu(z)$ für $\nu > -k$ $2k$ imaginäre und für $\nu < -k$ 2 reelle und $2k-2$ imaginäre Nullstellen. Ist die Anzahl der imaginären Nullstellen durch 4 teilbar, so gibt es keine rein imaginären Nullstellen; ist sie dagegen nur durch 2, aber nicht durch 4 teilbar, so sind 2 der imaginären Nullstellen rein imaginär.

Ausführliche Abhandlungen erscheinen in den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften (München) und in den Mathematischen Annalen.

Analysis

ÜBER EINEN SATZ VON DARBOUX

Von L. TSCHAKALOFF, Sofia

Bekanntlich hat Darboux den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf komplex Funktionen übertragen. Er hat nämlich bewiesen [1]), daß für eine komplexe Funktio $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ der reellen Veränderlichen x, die im Intervall $a \leqq x \leqq b$ steti differentiierbar ist, die Ungleichung

$$(1) \qquad |f(b) - f(a)| \leqq (b-a)|f'(\xi)|$$

besteht, wobei ξ eine passend gewählte Zahl zwischen a und b ist.

Was läßt sich über das Variabilitätsfeld von ξ aussagen, wenn etwa $f(x)$ ei Polynom von gegebenem Grade bedeutet? Ich fasse diese Frage präziser folgende maßen. Es bedeute C_k die Klasse aller Polynome $f(x)$ mit reellen oder komplexe Koeffizienten und vom Grade $\leqq k$. Ich suche ihr eine Menge $\mathfrak{M}_k$ von reellen ode komplexen Zahlen derart zuzuordnen, daß 1) jedem Polynom $f(x)$ von C_k mindesten ein ξ aus $\mathfrak{M}_k$ entspricht, so daß Ungleichung (1) erfüllt ist; 2) keine echte Tei menge von $\mathfrak{M}_k$ die unter 1) erwähnte Eigenschaft besitzt. Eine solche Menge $\mathfrak{M}$ nenne ich kurz *eine Minimalmenge in bezug auf die Klasse* C_k.

In diesem Vortrage habe ich folgende Sätze bewiesen unter der unwesentliche Einschränkung $a = -1$, $b = 1$.

1. Es gibt keine aus p Zahlen bestehende Minimalmenge in bezug auf die Klass C_k, wenn $p \leqq \frac{k-1}{2}$ ist.

2. Ist k gerade, $k = 2n$, so gibt es eine einzige aus n Zahlen bestehenden Min malmenge $\mathfrak{M}_k$, welche mit den Wurzeln des n-ten Legendreschen Polynoms $P_n($ identisch ist.

3. Ist dagegen k ungerade, $k = 2n - 1$, so gibt es unendlich viele aus n Zahle bestehenden Minimalmengen in bezug auf die Klasse C_k. Eine beliebige solche Meng besteht nämlich aus den Nullstellen des Polynoms $P_n(x) + a P_{n-1}(x)$, wo $P_n($ und $P_{n-1}(x)$ zwei aufeinanderfolgende Legendresche Polynome sind und a eine reell Konstante bedeutet.

Wegen Raummangel werde ich die Beweise dieser Sätze in einer anderen Zei schrift veröffentlichen.

---

[1]) Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable. Journal de mathématiques pur et appliquées, 3ème serie, t. 2. (1876), p. 291.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES COSINUS D'ORDRE SUPÉRIEUR

Par ODETTE et JACQUES DEVISME, Le Havre

Soit $\alpha = e^{\frac{i\pi}{n}}$ ou $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ suivant que n est pair ou impair, ce qui entraîne

$$\sum_{K=1}^{n} \alpha^{2K+1} = 0.$$

Posons

$$n f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{K=1}^{n} e^{\sum_{i=1}^{n-1} x_i \alpha^{i(2K+1)}},$$

et considérons le produit

$$V_n(h; x_1, \ldots, x_{n-1}) = \prod_{K=1}^{n} (1 - h e^{\sum_{i=1}^{n-1} x_i \alpha^{i(2K+1)}}) = A_o^n(x) + A_1^n(x) h + \ldots + A_n^n(x) h^n.$$

1° On a $V_n(h; x_1, \ldots, x_{n-1}) = (-h)^n V_n(\frac{1}{h}; -x_1, \ldots, -x_{n-1})$

donc $A_j^n(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (-1)^n A_{n-j}^n(-x_1, \ldots, -x_{n-1})$.

2° Les racines de l'équation en h $V_n(h; x) = 0$ sont égales aux n expressions $e^{-\sum_{i=1}^{n-1} x_i \alpha^{i(2K+1)}}$. Les sommes des racines, des carrés des racines, des cubes etc.... sont donc

$$s_1 = n f_n(-x_1, \ldots, -x_{n-1}), \qquad s_2 = n f_n(-2x_1, \ldots, -2x_{n-1}),$$
$$s_3 = n f_n(-3x_1, \ldots, -3x_{n-1}), \ldots \text{ etc.}$$

Les relations de Newton

$$A_n^n s_1 + A_{n-1}^n = 0,$$
$$A_n^n s_2 + A_{n-1}^n s_1 + 2 A_{n-2}^n = 0,$$
....

permettent de calculer les coefficients $A_j^n(x_1, \ldots, x_{n-1})$ de proche en proche; on déduit de ce qui précède que ces coefficients s'expriment au moyen des seuls cosinus d'ordre n à l'exclusion des $n-1$ autres sinus.

Par exemple

$$V_2(h, x) = 1 - 2h \cos x + h^2,$$
$$V_3(h, x) = 1 - 3h\, P(x, y) + 3h^2 P(-x, -y) - h^3,$$
....

On déduirait de ce qui précède certaines généralisations des résultats de M. P. Humbert[1].

(1) P. HUMBERT, On Appell's Function $P(\theta, \varphi)$ Proceedings of the Edinburgh Mathematical Societ Séries 2 -Vol. III-Part I.-p 53.

Analysis

SU ALCUNI TEOREMI DELLE FAMIGLIE NORMALI DI FUNZIONI ANALITICHE ANCHE IN RELAZIONE AL POSTULATO DI ZERMELO

Di SILVIO MINETTI, Roma

La presente comunicazione si propone di rilevare come vari teoremi sulle famiglie normali di funzioni analitiche siano suscettibili di essere notevolmente generalizzati, e che inoltre, sotto una conveniente ipotesi, sempre verificata nei casi concreti più interessanti, essi sono altresì suscettibili di essere dimostrati evitando l'uso del postulato di Zermelo.

Premetto un lemma di per sè stesso già molto notevole. Esso estende agli olospazi[1]) una proposizione già data, per gli S_n, dal mio illustre Maestro Prof. Severi[2]), la quale dà una dimostrazione del citato postulato relativamente agli insiemi limitati e serrati[3]). Sia F un insieme di funzioni olomorfe ed equilimitate in un campo serrato C che suppongo essere, per semplicità, il cerchio unità. F' sia il derivato di F. Si designi inoltre con $\bar{f}(\theta)$ la funzione estremo superiore della famiglia di funzioni che sono la parte reale degli elementi di $F + F'$; Q_0 designi invece il coefficente di i all' origine della generica funzione dello stesso insieme $F + F'$, e $\bar{Q}_0$ l'estremo superiore dei Q_0. La $\bar{f}(\theta)$ è allora, (poichè $F + F'$ è un insieme estremale), funzione continua di θ in $0 - 2\pi$.

Diciamo X l'insieme dei punti $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ dove x_i, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ sono i punti di ascissa razionale di C, x_0 designando invece il punto origine e rileviamo che l'operazione funzionale, che al generico elemento f di $F + F'$ fa corrispondere, nel punto x_i, il valore $\bar{Q}_0$ per $i = 0$, e il corrispondente valore della $\bar{f}(\theta)$ per $i \neq 0$, è un' operazione continua. Esisterà dunque, in virtù di noto teorema, almeno un elemento di $F + F'$ nel quale tale operazione raggiunge il suo estremo superiore. Si designi allora con I_{x_0} l'insieme degli elementi di $F + F'$ per cui resulta $Q_0 = \bar{Q}_0$, e il derivato di esso; con I_{x_1} l'insieme degli elementi f di I_{x_0} per cui è $f(x_1) = \bar{f}(x_1)$ [4]) etc. Gli I_{x_i} sono serrati. Resta così determinata la successione di insiemi estremali $I_{x_0}, I_{x_1}, I_{x_2}, \ldots\ldots$ ciascuno contenuto nel precedente. Due eventualità possono allora

[1]) Spazii funzionali suscettibili di esser considerati ad una infinità continua di dimensioni.

[2]) Vedi I. Severi. Su alcune questioni di topologia infinitesimale Annales Soc. Polonaise de Mathématique t. IX 1930.

[3]) „Serrati" seguendo il Severi, cioè: „chiusi" secondo la comune terminologia.

[4]) Con ovvio significato dei simboli adottati.

presentarsi: o per un valore finito di n il corrispondente insieme I_{x_n} è numerabile, oppure ciò non accade. Nel primo caso si sceglierà come elemento « distinto » di $F + F'$ il « primo » elemento di I_{x_n} ed esso appartiene ad $F + F'$. Nel secondo, poichè si dimostra in forza della equicontinuità della famiglia di funzioni formata da $F + F'$ a cui si sia aggiunta la

$$\varphi(x) = i\,\bar{Q}_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta)\,\frac{z + x}{z - x}\,d\theta$$

che la $\varphi(x)$ testè definita appartiene ad $F + F'$, come elemento « distinto » di $F + F'$ si sceglierà la $\varphi(x)$, che appartiene pure come si è ora detto, ad $F + F'$. Premesso tal Lemma conseguono i preannunciati teoremi. Mi limito qui a citare due di essi.

I° « *Se una famiglia F di funzioni $f(z)$ olomorfe ed equilimitate all'interno di un* « *campo C (che può supporsi essere il cerchio unità) è ivi normale, e non am-* « *mette funzioni limiti constanti, il numero degli zeri della $f(z) - a$, (a costante)* « *contenuti all'interno di C, è egualmente limitato, sia rispetto alla totalità* « *delle funzioni f che appartengono alla famiglia normale serrata costituita dalla* « *data e dal suo insieme derivato, sia rispetto a tutti i possibili valori di a.* »

II° « *Sia S una successione di funzioni $f_n(z)$ olomorfe, estratta da una famiglia* « *quasi normale e che sia, in un intorno di un punto A, completamente irregolare.* « *Esiste allora un indice n_0 tale che a partire da esso tutte le equazioni $f_n(z) - a$,* « *qualunque sia a, hanno una radice nell' intorno di A.* »

METRICIZZAZIONE DELLO SPAZIO FUNZIONALE DELLE FUNZIONI OLOMORFE IN UN MEDESIMO CAMPO. GLI OLOSPAZI IN GENERALE E I LORO RAPPORTI CON LA TEORIA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Di SILVIO MINETTI, Roma

Nel 1906 il Fréchet con la sua tesi [1]) poneva i fondamenti della metrica per vari e interessanti spazi funzionali. Si aprì così un nuovo, vasto, fecondo campo di ricerche che aveva avuto per precursori il Volterra, l'Hadamard, e il Pincherle. Ma

[1]) Rend. Circ. Mat. Palermo 1906, tomo XXII.

se innumerevoli sono stati i progressi sin quì conseguiti nella parte generale ed, ad un tempo, astratta di quella teoria, nulla si è fatto invece per avanzare, in modo veramente utile, nello studio della metrica dello spazio funzionale delle funzioni olomorfe in un medesimo campo C (spazio che chiamerò (F) e che è quello che forse maggiormente interessa. Per la nozione di distanza di due siffatte funzioni f e g, vige ancor oggi l'espressione del Fréchet

$$(1) \qquad (f, g) = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{(f, g)_n}{1 + (f, g)_n} \quad ^{1)}$$

Essa permette di stabilire le proprietà strutturali di quello spazio, ma non costituisce certo una definizione che sia senz'altro accettabile, perchè non concretamente vantaggiosa. Innanzi tutto viene a dipendere in modo essenziale, da elementi estranei ai dati, che sono la f e g e il campo C; poi non si presta a stabilire utilmente una metrica angolare, e presenta infine varii altri serii inconvenienti.

Scopo della presente comunicazione è di riferire intorno ad una mia memoria in corso di stampa, nella quale mostro come lo spazio (F), possa esser metricizzato in modo veramente utile sotto mille diversi aspetti, e come la metricizzazione di esso, che io ho elaborata, conduca ad inattesi legami fra teorie della più grande importanza. Partendo dall' osservazione che una $f(z)$ olomorfa all' interno di un campo C (che supporrò essere il cerchio unità) resta perfettamente individuata dai valori della sua parte reale al contorno, e dal coefficiente di i all'origine, assumo in luogo della (1) la

$$(2) \qquad (f, g) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [P_f(\theta) - P_g(\theta)]^2 \, d\theta + |Q_{(0)f} - Q_{(0)g}|^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad ^{2)}$$

e dimostro che tale definizione di distanza si dimostra veramente opportuna per lo studio della metrica in questione. Ciò per le seguenti ragioni:

I° (f, g) non dipende da elementi estranei ai dati.

II° la (2) permette di stabilire egualmente bene come la (1), tutte le proprietà strutturali dello spazio funzionale in esame.

III° si presta a stabilire una utile metrica angolare.

IV° fa conseguire una armonica fusione delle metriche di molti altri interessanti spazi di funzioni, riconducendo in particolare lo spazio (F), agli spazi hilbertiani, già così profondamente studiati, fra gli altri, dal nostro compianto Vitali.

---

[1]) Vedi nota precedente pag. 45—46.

[2]) Dove $P_f(\theta)$ designa la parte reale della f sul contorno di C, e $Q_{(0)f}$ il coefficiente di i all' origine; analogo significato hanno, poi, $P_g(\theta)$ e $Q_{(0)g}$.

Ma concependo lo spazio (F) come uno spazio ad una infinità continua, anzichè numerabile di dimensioni, (olospazio), come, distaccandomi dal Vitali e da tutti gli altri, io faccio, si ha il vantaggio che le equazioni delle sue varietà sono equazioni differenziali, che sono poi lineari se, e soltanto se, le corrispondenti varietà sono varietà geodetiche. La teoria delle equazioni differenziali riceve così una interpretazione geometrica molto suggestiva, che per altro non si riduce ad una semplice questione rappresentativa ma conduce a mietere vari, interessanti, e concreti fatti analitici. Si delinea intanto una netta distinzione fra la natura delle equazioni differenziali non lineari: distinguendole in quelle che io chiamo pseudo-lineari, e che godono della proprietà di avere i propri integrali in comune con una equazione differenziale lineare di ordine sufficientemente elevato; e quelle che io chiamo trascendenti, che non godono invece di detta proprietà. Per le prime è possibile ricondurre le loro integrazioni a quelle di una equazione lineare; per le seconde no. Sorpasserei i limiti concessi alle presenti comunicazioni se mi dilungassi ad esporre i risultati a cui son pervenuto. Mi limito quì a citare quello con cui chiudo la mia già citata Memoria preliminare su tal soggetto. Esso è il seguente:

« *Condizione necessaria e sufficente affinchè un' equazione differenziale non lineare,*
« *per esempio del primo ordine,* $y' = f(x, y)$, *abbia i suoi integrali in comune con*
« *un' equazione differenziale lineare di ordine finito, supposto che* $f\ (x\ y)$ *sia analitica*
« *all' intorno di un sistema di valori* $x\,y$, *e che lo sviluppo di Cauchy relativo all' equa-*
« *zione stessa*

$$y - y_0 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{d^i y}{dx^i}\right)_{(x_0 y_0)} \frac{(x - x_0)^i}{i\,!}$$

« *sia, in un intorno di* y_0 *derivabile termine a termine, è che esista un sistema di un*
« *numero finito* μ *di costanti* λ_i, *non tutte nulle, per cui siano verificate le condizioni*

$$\left[\sum_{i=1}^{i=\mu} \lambda_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial y_0^{\,i+1}}\right] \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + \ldots + y_n \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}\right)^n \cdot f\right]_{(x_0,\, y_0)} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

« *con* $y_k = \dfrac{d^k y}{dx^k}$, *e facendo attenzione che non sussiste, relativamente ai prodotti di*
« *operazioni che provengono dallo sviluppo della potenza dell' operatore che figura*
« *entro la parentesi quadra, la legge di permutabilità.*» —

PERIODISCHE LÖSUNGEN EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG

Von F. TRICOMI, Turin

In dem anscheinend besonders einfachen Falle einer einzigen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung leisten die klassischen Verfahren für die Untersuchung der periodischen Lösungen wenig Hilfe, weil im allgemeinen keine spezielle periodische Lösung der Gleichung *a priori* bekannt ist, und die Gleichungen erster Ordnung, die besonders interessieren, nicht linear sind. Aus diesem Grunde scheint es mir wertvoll, ein einfaches Verfahren für die Untersuchung der (eventuellen) periodischen Lösungen mit der Periode ω einer Differentialgleichung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

wo f eine periodische Funktion von x mit der Periode ω bezeichnet, bekannt zu machen, welches mich in einem Falle, der mir kürzlich vorgekommen ist, zu einem vollen Erfolge geführt hat.

Dieses Verfahren beruht einerseits darauf, daß die Gleichung

$$\varphi(x_0 + \omega) = \varphi(x_0), \tag{2}$$

wo x_0 irgendeinen festen Wert von x bezeichnet, die notwendige und hinreichende Bedingung darstellt, damit die Lösung $y = \varphi(x)$ der Differentialgleichung (1) eine periodische Funktion (mit der Periode ω) sei. Andererseits bemerken wir, daß unter bekannten, wenig einschränkenden Bedingungen die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung *stetig* von den Anfangsbedingungen abhängt. Wenn es uns also gelingt, in einem Gebiet der Ebene (x, y), wo die oben genannten Bedingungen erfüllt sind, zwei solche Lösungen $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ der Gleichung (1) zu bestimmen, die die Ungleichungen

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0 + \omega) \leqq \varphi_1(x_0) \\ \varphi_2(x_0 + \omega) \geqq \varphi_2(x_0) \end{cases} \tag{3}$$

befriedigen, dann existiert sicher in demselben Gebiet auch (wenigstens) eine Lösung $y = \varphi(x)$, die die Gleichung (2) befriedigt, d. h. eine periodische Lösung (mit der Periode ω) unserer Differentialgleichung. Wenn man dagegen für *alle* Lösungen $y = \varphi(x)$ entweder immer

$$\varphi(x_0 + \omega) < \varphi(x_0)$$

oder immer

$$\varphi(x_0 + \omega) > \varphi(x_0)$$

hat, kann keine periodische Lösung existieren.

Betrachten wir z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d\,(y^2)}{dx} + \alpha y + \beta + \sin x = 0, \tag{4}$$

wo α und β zwei positive Konstanten sind, deren periodische Lösungen (welche die Periode 2π nötigerweise besitzen müssen) die Lösung eines wichtigen Problems der Elektrotechnik liefern [1]). Mit dem oben geschilderten Verfahren kann man feststellen, daß, falls $\beta > 1$ ist, die Gleichung (4) immer eine und nur eine periodische Lösung besitzt. Ist dagegen $\beta \leq 1$, so existiert ein kritischer Wert α_0 von α (eindeutige Funktion von β) mit der Eigenschaft, daß die Differentialgleichung (4) eine (und nur eine) oder keine periodische Lösung besitzt, je nachdem $\alpha \leq \alpha_0$ oder $\alpha > \alpha_0$ ist.

ÜBER DIE ERSTE RANDWERTAUFGABE BEI MONGE-AMPÈRESCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VOM ELLIPTISCHEN TYPUS

Von FRANZ RELLICH, Göttingen

Es wird die allgemeine Monge-Ampèresche Differentialgleichuug

$$F \equiv E\,(u_{xx}\,u_{yy} - u_{xy}^2) + A\,u_{xx} + 2\,B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + D = 0$$

betrachtet, deren Koeffizienten A, B, C, D, E Funktionen von x, y, u_x, u_y sind. Es wird u. a. bewiesen: In einem zusammenhängenden Gebiet G gibt es *höchstens zwei* auf dem Rande übereinstimmende Lösungen von $F = 0$, für die F überall in G elliptisch ist, d. h. für die $AC - B^2 - ED > 0$ gilt. Dabei werden über A, B, C, D, E nur Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gemacht. Anwendungen auf differentialgeometrische Fragen. — Für eine Gruppe von Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen wird das angehörige Variationsproblem aufgestellt und diskutiert.

---

1) *Tricomi* — Sur une équation différentielle de l'électrotechnique (Paris C.R. 193, s. 635 (19 - 10 — 1931)).

Analysis

NOUVELLES RECHERCHES D'«INTÉGRATION LOGIQUE»

Par JULES DRACH, Paris

1. J'ai montré autrefois (*Proceedings* du Congrès de Toronto, 1924, I, p. 484—495) comment on pouvait déterminer, de la manière la plus générale, un élément linéaire : $ds^2 = 4\lambda\, du dv$, de façon que l'équation des géodésiques, prise sous la forme: $pq = \lambda$ aux dérivées partielles ou sous la forme linéaire: (1) $\lambda \frac{\partial f}{\partial u} + w \frac{\partial f}{\partial v} + 2w \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial w} = 0$ avec $w = p^2$, possède une intégrale *entière* en p, q et d'ordre quelconque — ou même une intégrale

$$\varphi = \sigma(u, v)\, w^{m_0} (w - \gamma_1)^{m_1} \dots (w - \gamma_p)^{m_p}$$

les m_i désignant des constantes. En introduisant les variables *caractéristiques d'Ampère*, φ_i, qui sont les intégrales des équations $\lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \zeta_i \frac{\partial f}{\partial v} = 0$ où les ζ_i sont les solutions de l'équation $\varphi'(w) = 0$, j'ai ramené le problème à l'intégration, par intégrales définies, d'un *système de Laplace* aux variables φ_i et à des quadratures de différentielles totales. Depuis, j'ai pu traiter par la même méthode, avec quelques modifications, les cas d'exception réservés : $m_0 = \Sigma m_i = 0$.

2. La recherche des cas où l'équation des géodésiques admet *deux intégrales rationnelles* en w, conduit à des systèmes différentiels dont j'ai indiqué la résolution par des voies regulières (Comptes rendus de l'Ac. des Sciences de Paris, 27 décembre 1927). La méthode a été appliquée en détail au cas des éléments linéaires de Liouville.

3. M. Otto Volk avait montré (*Atti* du Congrès de Bologne, 1928, IV, p. 357—362) que la détermination des éléments linéaires pour lesquels il existe un réseau *triangulaire* de géodésiques — c'est-à-dire tels que les lignes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $u - v = \text{const.}$, soient géodésiques, dépend de l'intégration d'un système de deux équations aux dérivées partielles du quatrième ordre à une fonction inconnue. J'ai pu établir (Comptes rendus de l'Ac. des Sciences de Paris, 16 novembre 1931) que ces équations possédaient une solution dépendant de trois fonctions arbitraires d'un argument — et par l'application de ma méthode générale, l'obtenir par l'intégration d'un système de Laplace à trois variables. La même méthode s'applique au cas où les tangentes à une courbe de troisième classe sont des géodésiques.

4. Mes recherches antérieures m'ont amené souvent à remplacer des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à une fonction inconnue de deux variables

par un système de Laplace à *n* variables et des quadratures. Il est clair que cela se généralise : Il existe des équations d'ordre quelconque à trois variables, par exemple, que l'on peut ramener à des systèmes linéaires de Laplace du *troisième* ordre et à des équations différentielles ordinaires, à quatre variables ou davantage — d'où l'on tire des vues nouvelles sur le rôle des variables caractéristiques.

5. Enfin, pour finir, une remarque d'ordre tout à fait général : Ma théorie de la *rationalité* ou « *Intégration logique* » peut s'appliquer, par exemple, à un système différentiel Σ à une fonction inconnue, *irréductible,* où deux des dérivées d'ordre supérieur au moins figurent sous forme rationnelle, les coefficients étant ou *bien définis* ou *arbitraires.* Comme dans les équations dérivées de Σ, les dérivées *paramétriques* d'ordre supérieur figurent linéairement ou sous forme entière, les *réductions possibles de Σ, par particularisation des coefficients,* correspondront à l'existence de relations *nouvelles* compatibles avec Σ et *rationnelles* par rapport à ces dérivées paramétriques. Nous avons rencontré (*Atti* du Congrès de Bologne, 1928, II, p. 11—25) de nombreux exemples de *types* de réduction dont la remarque précédente explique l'existence.

SUR L'INTÉGRATION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE À TROIS VARIABLES INDÉPENDANTES

Par GEORGES CERF, Strasbourg

Dans une communication à l'Académie des Sciences de Paris [1]), j'ai exposé une méthode générale d'intégration qui s'applique à des classes étendues d'équations et de systèmes d'équations aux dérivées partielles ; j'en ai signalé certaines applications aux équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes ; je vais indiquer une manière d'appliquer la méthode aux équations aux dérivées partielles du second ordre à 3 variables indépendantes (z fonction inconnue de x_1, x_2, x_3).

Soit (E) une telle équation ; (Σ) le système de Pfaff, bien connu, de 4 équations à 12 variables, qui lui est équivalent ; je cherche à former un système de Pfaff (Σ_1), comprenant (Σ) et une ou deux nouvelles équations aux différentielles totales, des mêmes variables, de telle façon que (Σ_1) soit de classe inférieure à 12 ; s'il en est ainsi, à toute solution de (Σ_1) qui s'exprime par 9 relations correspond, en général,

[1]) Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles (Comptes Rendus t. 194 (1932) p. 1544).

une intégrale de (E) ; grâce à la généralité de telles solutions de (Σ_1), grâce aussi à la généralité de ces systèmes (Σ_1), on peut espérer, dans des cas favorables, intégrer (E). Les équations (E) qui entrent en ligne de compte admettent une forme caractéristique décomposable en deux facteurs linéaires.

Plus particulièrement, considérons une équation (E') obtenue par l'élimination des paramètres λ et μ entre les trois relations :

$$p_{i,1} + \lambda p_{i,2} + \mu p_{i,3} = \varphi_i (x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3, \lambda, \mu) \quad i = 1, 2 \text{ ou } 3,$$

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad p_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

L'équation (E') admet deux systèmes de caractéristiques à une dimension, dont l'un est du premier ordre. Du système (Σ') associé à (E') comme (Σ) l'est à (E), on peut déduire un système de Pfaff (Σ'') de deux équations et de classe 9, les variables étant x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3, λ et μ. Cherchons à associer à (Σ'') une équation aux différentielles totales de ces 9 variables pour que le système (Σ_1'') de 3 équations soit de classe 8; pour une classe étendue d'équations (E'), cette opération est possible ; le système (Σ_1'') admet toujours des intégrales qui peuvent être représentées par 6 relations auxquelles correspondent alors des intégrales de (E').

Un cas où les calculs sont particulièrement simples, est celui où les φ_i ne dépendent que de λ et μ ; on est conduit à des équations qu'on peut intégrer complètement par la méthode indiquée. D'ailleurs, il se présente des circonstances singulières qui mettent en évidence des équations (E') dont les deux familles de caractéristiques ne sont pas distinctes ; l'intégrale générale de ces équations s'exprime sans quadratures.

QUELQUES REMARQUES RELATIVES À UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIÈME ORDRE

Par JACQUES DEVISME, Le Havre

Notations. — Soit

$$\Delta U = \operatorname{div}\left[\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2}\right)\right],$$

l'expression aux dérivées partielles associée au polynome

$$p(x) = \sum_k x_k \times \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2.$$

Nous représenterons par $D_{x_i}U, D^2{x_i x_j}U\ldots$ les expressions aux dérivées partielles associées aux polynômes $\frac{\partial p}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}\ldots$ et par $p(\alpha)$, $p(x-\alpha)$, $p(A)$ les expressions obtenues en remplaçant dans $p(x)$ les x_i par α_i, $x_i-\alpha_i$ ou A_i.

Problème. Considérons le point fixe $M(x_1\ldots x_n)$ et le point mobile $P(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ décrivant la surface S à $n-1$ dimensions de notre espace à n dimensions. La fonction de point

$$U(x_1\ldots x_n)=\underbrace{\int\ldots\int_S}_{n-1}[p(x-\alpha)]^m\alpha\sigma,$$

vérifie une équation aux dérivées partielles de forme plus ou moins compliquée suivant la surface S considérée.

En utilisant les identités remarquables vérifiées par le polynôme $p(x)$ telles que

$$p\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)=4n^3p^2,\quad \Delta[p(x)]=2n^3(n-1)\ldots$$

on trouve que

1° pour la surface S d'équation $\alpha=0$ (hyperplan) la fonction U vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta U=\frac{m}{x}\left[D_x U+\frac{n-3}{2mn}\left(nD_x U-\sum_1^n D_{x_i}U\right)\right],$$

2° pour la surface S d'équation $p(\alpha)=1$ la fonction U vérifie l'équation aux dérivées partielles (où p représente $p(x)$)

$$[p-1]\,\Delta U-m\sum_i\frac{\partial p}{\partial x_i}D_{x_i}U-\frac{n-3}{2n}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)(D_{x_i}U-D_{x_j}U)$$
$$+2n^3m\,[2m+n-3]\left[\sum_i x_i\frac{\partial U}{\partial x_i}-mU\right]=0.$$

On pourrait effectuer dans des cas plus compliqués un calcul analogue ; ce qui est remarquable, c'est la présence du coefficient $n-3$ qui explique la grande simplicité des résultats trouvés dans le cas $n=3$ de M. P. Humbert.

Références : P. Humbert. Sur une généralisation de l'équation de Laplace. (Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. 8, 1929, p. 145.)

J. Devisme. Sur quelques équations aux dérivées partielles. (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 193, 1931, p. 982 et 194, 1932, p. 516.)

SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

Par J. HADAMARD, PARIS

1. Les résultats acquis relativement aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre ont été étendus aux équations *totalement* elliptiques (p. ex. par E. E. Lévy) ou totalement hyperboliques [1]) (p. ex. par Holmgren).

Or il n'est justement pas sans intérêt de chercher ce qui arrive pour des équations disons du quatrième ordre de type *composite* [2]), c'est-à-dire tel que le cône caractéristique en chaque point se décompose en deux cônes du second degré l'un réel, l'autre imaginaire. Cas simple : l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \Delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta u = 0 \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ou, en rapportant aux caractéristiques,

$$(1') \qquad \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \Delta u = 0 \qquad \xi = x + y, \ \eta = y - x.$$

Le problème de Cauchy correspondant à (1), consistant à se donner pour $x = 0$ les valeurs de u, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, n'est pas possible en général pour des données non-analytiques. On obtient aisément un problème correctement posé en portant de la forme (1') de l'équation. Soient pris sur les axes des ξ et des η (caractéristiques issues de l'origine) deux segments OA, OB (fig. 1, 1bis) et joignons AB par une ligne L ayant (fig. 1) des coordonnées monotones, donc tout entière comprise dans le rectangle $OABC$ construit sur OA et OB.

On pourra alors se donner:

u et Δu le long de OA, OB ;
u (uniquement) le long de L.

Si L était, comme sur la figure 1bis, extérieure au rectangle, coupant en D le prolongement de AC, en E le prolongement de BC, il faudrait se donner les valeurs de

[1]) Ces dernières font également l'objet de recherches, actuellement en cours, de M. Teodorescu et c'est ce qui m'a même suggéré la note actuelle.

[2]) A distinguer du type *mixte* traité dans un travail bien connu de M. Tricomi.

u et de Δu non seulement sur OA et OB, mais sur les arcs AE, BD de L, puis u seul sur l'arc restant ED.

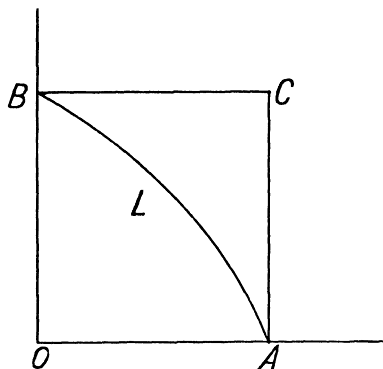


Fig. 1

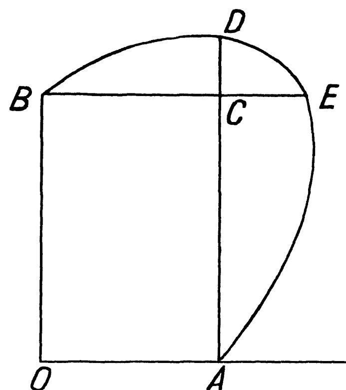


Fig. 1 bis

Toutes ces considérations s'étendent d'elles-mêmes à toute équation de la forme

$$F[G(\ )] = 0,$$

F étant un polynôme différentiel du second ordre hyperbolique ; G un polynôme elliptique.

2. Donnons-nous maintenant u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur le segment (0, 1) de l'axe des y, puis u (seul) le long d'un chemin L joignant les extrémités de ce segment. Pour trouver u d'après ces données, remarquons d'abord que l'intégrale générale de (1) peut se mettre sous la forme

$$u = V + U \tag{2}$$

V étant une fonction harmonique et $U = \Phi\,(y + x) + \psi\,(y - x)$ une solution de l'équation $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$. Or la connaissance de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, donc de Δu, le long du segment d'axe des y (laquelle résulte immédiatement des données) fournit, le long de ce segment, les valeurs de U, donc (puisque u est connu) celles de V. Prenant alors la fonction $\Phi\,(y)$ comme inconnue, on trouve (de moins si L a par rapport aux caractéristiques la disposition de la fig. 1), pour $\varphi(y) = \Phi'(y)$, une équation intégrale de Fredholm (pour laquelle toutefois il y aurait lieu de discuter les singularités du noyau aux points 0,0 et 0,1).

3. S'impose également l'examen d'un problème analogue au problème biharmonique (connaissance de u et de ses dérivées premières le long d'un contour fermé). Les résultats concernant les équations du second ordre hyperbolique font présumer qu'un tel problème est en général impossible.

4. L'expression (2) de l'intégrale générale de (1) est évidemment un cas particulier d'un théorème relatif aux équations linéaires de la forme

$$F[G(u)] = 0,$$

théorème qui se présente de lui-même pour les équations différentielles linéaires à coéfficients constants mais qui s'applique aussi aux équations aux dérivées partielles. Il n'est même pas nécessaire de supposer les opérateurs à coefficients constants, mais seulement de les supposer permutables entre eux. De plus, ils doivent être sans facteur commun. La démonstration [1]) dépendrait des principes connus posés par Méray et Riquier, lesquels ne sont malheureusement acquis que dans le cas analytique.

SUR LA FORMULE DE STOKES POUR ESPACES A CANAUX

Par A. BUHL, Toulouse

Il s'agit de la formule

$$(1) \qquad \int_{\Sigma} U dP + V dQ = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial U}{\partial Q} \right) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma .$$

Le canal élémentaire a une section quadrilatérale. Sur ses faces latérales, P, Q, $P + dP$, $Q + dQ$ sont constants. Un faisceau de canaux découpe, sur des surfaces transversales, des cloisons σ dites *en projection canale.* Pour celles-ci l'intégrale double de (1) est invariante. L'équation, aux dérivées partielles de Φ,

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{\Phi_X^2 + \Phi_Y^2 + \Phi_Z^2}} \begin{vmatrix} \Phi_X & \Phi_Y & \Phi_Z \\ P_X & P_Y & P_Z \\ Q_X & Q_Y & Q_Z \end{vmatrix} = \theta(X, Y, Z)\, \Delta(P, Q)$$

---

[1]) M. Cerf me fait savoir que cette démonstration résulte de ses propres travaux.

donne des surfaces $\Phi = 0$ sur lesquelles un canal (ou un faisceau de canaux) intercepte des cloisons S pour lesquelles l'intégrale double en θdS est invariante.

L'équation (2) est une généralisation de l'équation de Jacobi relative au mouvement d'un point matériel. Tout dS ou $d\sigma$ permet de déplacer, dans un canal, un élément intégral invariant, analogue à une *masse*, élément qui peut aussi dépendre d'un paramètre t. Il y a donc, en ce qui précede, le germe d'une Mécanique.

Les symboles de Jacobi et de Schrödinger

$$\mathcal{J}(S) = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 - S^2\Omega\,, \quad \Sigma(V) = \Delta V + V\Omega\,,$$

en posant $u = S_1 + S_2\,, \quad v = S_1 - S_2\,,$ entraînent que

$$\mathcal{J}(S_1) - \mathcal{J}(S_2) + u\,[\Sigma(S_1) - \Sigma(S_2)] = (uv_x)_x + (uv_y)_y + (uv_z)_z\,.$$

Si $S_1 - S_2$ est une solution de $\Sigma = 0$, on peut choisir u de telle sorte que $J(S_1) = J(S_2)$. Il y a là une invariance jacobienne attachée à l'équation de Schrödinger. De plus $u\,v_x$, $u\,v_y$, $u\,v_z$ prennent les formes des mineurs de α, β, γ dans le déterminant de (1). Il y a des systèmes de canaux et, par suite, des mouvements multiponctuels attachés à l'équation de Schrödinger *à trois variables*.

SUR LES PARAMÈTRES D'UN SYSTÈME DE FONCTIONS, QUI SONT ESSENTIELS

Par G. PFEIFFER, Kiew

S. Lie[1]) a donné le critère, pour que les paramètres :

1) $$a_1, a_2, \dots a_r$$

du système de fonctions :

2) $$z_i = f_i \quad (x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_r), \qquad i = 1, 2, \dots m$$

soient essentiels.

L. Bianchi[2]) a considérablement remanié le critère de S. Lie et l'a amené à une forme commode pour la pratique. Il construit la matrice fonctionnelle par rapport

[1]) *S. Lie und Fr. Engel.* — Theorie der Transformationsgruppen (Leipzig, 1888, B. I, S. 13-14).
[2]) *L. Bianchi.* — Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni (Molagna, 1928 p. 30—36).

aux paramètres 1) des fonctions 2) et de leurs dérivées par rapport aux $x_1, \ldots x_r$ jusqu'à l'ordre $r - 1$.

Nous avons simplifié les raisonnements de L. Bianchi. Dans notre théorème, la matrice correspondante à celle de L. Bianchi contient moins de colonnes, l'ordre des différentiations par $x_1, \ldots x_n$ est habituellement plus bas que $r - 1$.

Chez S. Lie [1]) on trouve encore un autre moyen, indiqué en traits généraux, pour juger si les paramètres 1) sont essentiels. Les raisonnements de L. Bianchi, sous forme simplifiée, donnent la seconde méthode de S. Lie.

Le théorème que nous avons démontré, nous a conduit à la résolution des problèmes que voici :

« Sur la possibilité d'exprimer les fonctions qui contiennent des paramètres, par quelques paramètres ou par leur totalité et par des fonctions qui ne renferment pas les paramètres détachés »,

« Sur la possibilité de construire, par la combinaison linéaire des équations d'un système complet d'équations linéaires qui contiennent des paramètres, des systèmes complets linéaires, où le nombre des paramètres et des équations sont égaux »,

« Sur les solutions linéairement indépendantes des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes ».

LA GÉNÉRALISATION DES MÉTHODES: DE JACOBI POUR L'INTÉGRATION DES SYSTÈMES COMPLETS D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ET DE JACOBI-MAYER POUR L'INTÉGRATION DES SYSTÈMES COMPLETS D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

Par G. PFEIFFER, Kiew

S. Lie [2]) a montré, que les opérateurs $I(f)$ permutant les solutions de l'équation linéaire $X(f) = 0$, se définissent par la relation :

$$X I(f) - I X(f) = \lambda X(f).$$

---

1) ibidem, s. 183.

2) *S. Lie und Fr. Engel.* — Theorie der Transformationsgruppen (Leipzig, B. I, 1888, S. 138—143).

M. A. Buhl [1]) a cherché les operateurs $I(f)$. Nous avons définitivement résolu ce problème, auquel sont attachés beaucoup de noms saillants, dans une série de mémoires, dont le principal parut en 1931 [2]). La bibliographie de la question peut être trouvée dans notre Note initiale [3]) et dans le Mémorial des sciences mathématiques [4]).

Nos discussions sur la recherche des opérateurs d'une équation linéaire et des systèmes complets d'équations linéaires nous ont conduit à la généralisation de la méthode de Jacobi et des recherches correspondantes de A. Clebsch. Entre autres nous avons démontré l'affirmation de A. Weiler, que, pour intégrer le système complet d'équations linéaires, il n'est pas du tout nécessaire de le réduire à la forme d'involution ; on peut le réduire à une forme plus générale, à laquelle nous avons donné le nom de *système des systèmes complets successifs.*

Il va sans dire, que la généralisation de la méthode de Jacobi entraîne la généralisation de la méthode de Jacobi-Mayer.

GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE JACOBI POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE AVEC 2 OU 3 FONCTIONS DE 2 ET 3 VARIABLES INDÉPENDANTES

Par M. KOURENSKY, Kiew

Pour l'intégration du système de 2 équations non linéaires aux dérivées partielles du 1er ordre avec 2 fonctions inconnues de 2 variables indépendantes il faut chercher des intégrales particulières du système de 2 équations linéaires du 1er ordre à une seule fonction inconnue, liées avec les racines de l'équation quadratique. Quand le système donné contient 3 ou moins des dérivées partielles, nous aurons une seule

[1]) Thèse de Doctorat et les autres mémoires.

[2]) *G. Pfeiffer.* — Sur la permutation des intégrales d'une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du premier ordre (Ann. de Toulouse, 1931, p. 139—181).

[3]) *G. Pfeiffer.* — Sur la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre (Bull. des Sc. math., 1928, S. 2, t. LII, p. 350—352).

[4]) *A. Buhl.* — Aperçus modernes sur la Théorie des groupes continus et finis (Mém. des Sc. math. fasc. 33, Paris, 1928).

équation linéaire. Pour les systèmes aux 3 fonctions inconnues de 2 variables indépendantes, nous aurons les systèmes diverses des équations linéaires, liées avec les racines de l'équation quadratique. Pour les systèmes aux 2 fonctions inconnues des 3 variables indépendantes nous aurons les systèmes des équations linéaires auxiliaires, liées avec les racines de l'équation quadratique correspondante.

GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE DARBOUX POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE A DEUX FONCTIONS INCONNUES

Par M. KOURENSKY, Kiew

Dans la méthode de Darboux pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue z de deux variables indépendantes x, y, on est ramené à l'intégration du système de deux équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction auxiliaire Φ. L'intégration de ce système peut être réduite à l'intégration d'un système de deux équations linéaires, liées avec les racines de l'équation quadratique bien connue *(A. R. Forsyth,* Theory of dif. eq., vol. VI, p. 325).

Pour le système de deux équations non linéaires aux dérivées partielles du second ordre aux deux fonctions inconnues z, z' des variables indépendantes x, y, nous obtiendrons un système de 4 équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue auxiliaire Φ. L'intégration de ce système se réduit à l'intégration de 4 équations linéaires, liées avec une des racines d'une équation du 4me degré. Quand le système contient 5 dérivées des r, s, t, r', s', t', nous avons 3 équations linéaires, liées avec les racines de l'équation cubique, ou 4 éq. et l'équation algébrique du 4me degré. Pour les systèmes avec 4 dérivées du 2nd ordre nous avons des systèmes auxiliaires de 2, 3 ou 4 équations linéaires du 1er ordre à une seule inconnue Φ, liées avec les racines des équations : quadratique, cubique et biquadratique. Quand les systèmes donnés ont 3, 2 ou 1 dérivées du 2nd ordre, nous serons amenés à l'intégration de deux ou d'une seule équation linéaire du 1er ordre, non liée avec les racines des équations algébriques.

SUR LES SYSTÈMES INCOMPLETS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Par S. CARRUS, Alger

Bien souvent dans nos recherches, nous avons été conduits à des problèmes qui ne font l'objet d'aucun enseignement régulier. Nous voulons parler de certains problèmes indéterminés, quadratures portant sur des fonctions dont la forme peut être variable, résolution de systèmes d'équations différentielles en nombre moindre que le nombre d'inconnues.

Le cas le plus connu est celui qui s'introduit dans la recherche des développées d'une courbe gauche. En prenant la torsion sous la forme $\frac{1}{V'}$, on fait disparaître tout signe de quadrature et l'étude des propriétés est bien plus commode et bien plus élégante.

Dans l'étude de ce que nous appelons les développées obliques d'une courbe gauche C, et qui sont les arêtes de rebroussement des développables passant par C, nous avons à considérer trois fonctions λ, μ, ν, qui n'ont à satisfaire qu'à deux équations différentielles. En introduisant une fonction dont la forme reste indéterminée, nous pouvons intégrer complètement ce système sans aucun signe de quadrature. En particulier, pour l'arête de rebroussement, unique, dont C est la géodésique, nous pouvons obtenir sans signe de quadrature les coordonnées d'un point ainsi que l'arc de courbe.

Dans l'étude des courbes gauches dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire, on n'a qu'une seule équation différentielle entre trois fonctions x, y, z d'un paramètre t. Nous avons pu établir la solution la plus générale.

Dans l'expression du ds^2 d'une surface, si les coefficients E, F, G sont fonctions d'une seule variable, la surface est applicable sur une infinité de surfaces de révolution. Nous avons pu obtenir, sans quadrature, le ds^2 le plus général, les surfaces de révolution correspondantes et la correspondance entre les points.

De même pour la couple la plus générale formée de l'hélicoïde le plus général et de la surface de révolution sur laquelle il peut être appliqué.

Ces divers exemples nous ont conduit à étudier de façon systématique les systèmes incomplets d'équations différentielles :

Dans le cas des systèmes d'équations linéaires, d'ordres quelconques, à coefficients quelconques, nous avons pu obtenir la solution la plus générale sans aucun signe

de quadrature, c'est-à-dire la détermination des n fonctions, au moyen de $(n\text{-}m)$ fonctions arbitraires.

De même, nous avons résolu complètement les systèmes d'équations de la forme

$$f\,(dx_1,\ dx_2,\ \ldots\ dx_n\,,t) = 0$$

ne renfermant pas la différentielle de la variable indépendante t, les coefficients étant absolument quelconques.

Des procédés analogues peuvent s'appliquer aux systèmes d'équations aux dérivées partielles : Par exemple, on peut résoudre complètement l'équation

$$a\,\theta_1 + b\,\psi_2 + c = 0$$

entre deux fonctions ψ et θ de x, y, si $\frac{a}{b}$ est un polynôme en y et fonction quelconque par rapport à x.

L'équation linéaire la plus générale se ramène à celle-ci, par une substitution linéaire.

L'équation linéaire la plus générale entre trois fonctions inconnues est de la forme

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + b_1 q_1 + b_2 q_2 + b_3 q_3 + c_1 s + c_2 t + c_3 u + d = 0.$$

On peut, dans tous les cas, obtenir sans quadrature, la solution la plus générale, au moyen de deux fonctions arbitraires.

Tous ces exemples montrent quels résultats on peut espérer obtenir dans le cas de systèmes incomplets d'équations différentielles ou aux dérivées partielles. Il sera possible, sans doute, de trouver de grandes classes de systèmes d'équations qui puissent être résolues entièrement sans signe de quadrature.

AN EXPRESSION FOR GREEN'S FUNCTION IN GENERALIZED COORDINATES

By J. J. SMITH, Schenectady, U. S. A.

Let the equation in generalized orthogonal coordinates for the space under consideration be of the well-known form

(1) $$K \nabla^2 v = \partial v / \partial t$$

with boundary conditions of the form $hv - \partial v/\partial \xi = 0$, etc., where h is replaced by the constants h_1, $-h_2$, h_3, $-h_4$, h_5 and $-h_6$ for the boundaries $\xi = l_1$, $\xi = l_2$, $\eta = m_1$, $\eta = m_2$, $\zeta = n_1$, $\zeta = n_2$ respectively. Let the independent solutions of (1) be $F_1(\alpha, \xi)$ and $F_2(\alpha, \xi)$ regarded as a function of ξ when written in the form

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\varnothing(\xi)\frac{\partial v}{\partial \xi}\right] + \theta_\delta(\alpha)\,\Psi(\xi)\,v + k\chi(\xi)\,v = 0$$

and let $F_3(\beta, \eta)$, $F_4(\beta, \eta)$ and $F_5(\gamma, \zeta)$, $F_6(\gamma, \zeta)$ be similar functions when (1) is regarded as an equation for η and ζ respectively.

From the results of a previous paper in which a generalized expression for Fourier's Theorem is derived it can be shown that the instantaneous Green's Function which is the resulting temperature due to an instantaneous point source Q of heat placed at the point ξ_1, η_1, ζ_1 is given by

$$v = Q\,Z_{1p}(\xi, \xi_1)\;H_{1q}(\eta, \eta_1)\;S_{1u}(\zeta, \zeta_1)\;e^{-K\delta^2 t}$$

where

$$Z_{1p} = \sum_{\alpha_p} \frac{F_1(\alpha_p, l_2) + h_2 F_1(\alpha_p, l_2)}{F_1'(\alpha_p, l_1) - h_1 F_1(\alpha_p, l_1)}\;\frac{A_{\delta p}(\xi)\,A_{\delta p}(\xi_1)}{\frac{d}{d\alpha}\left\{K_\delta(\alpha)\,D_\delta\right\}_{\alpha = \alpha_p}}\;\frac{d\,\theta_\delta(\alpha_p)}{d\,\alpha_p}$$

and

$$A_{\delta p}(\xi) = [F_2'(\alpha_p, l_1) - h_1 F_2(\alpha_p, l)]\,F_1(\alpha_p, \xi) - [F_1'(\alpha_p, l_1) - h_1 F_1(\alpha_p, l_1)]\,F_2(\alpha_p, \xi)$$

$$D_\delta = [F_2'(\alpha, l_1) - h_1 F_2(\alpha, l_1)]\;[F_1'(\alpha, l_2) + h_2 F_1(\alpha, l_2)]$$
$$\quad - [F_2'(\alpha, l_2) + h_2 F_2(\alpha, l_2)]\;[F_1'(\alpha, l_1) - h_1 F_1(\alpha, l_1)]$$

$$K_\delta(\alpha) = \varnothing(\xi)\,[F_2(\alpha, \xi)\,F_1'(\alpha, \xi) - F_1(\alpha, \xi)\,F_2'(\alpha, \xi)]$$

$K_\delta(\alpha)$ being a constant with respect to ξ. α_0, α_1, α_2, ... are the zeros of $D = 0$ greater than a fixed number N. In these equations $F'(\alpha, \xi) = \partial F(\alpha, \xi)/\partial \xi$. The values of $H_{1q}(\eta, \eta_1)$ and $S_{1u}(\zeta, \zeta_1)$ may be written down from symmetry. The relation between δ and α_p, β_q and γ_u is found by direct substitution in (1).

Expressions for a permanent point source are derived, and other expressions for Green's Functions are given when the boundary conditions are of the type that v (and $\partial v/\partial \xi$) are the same at each end of the interval. For certain intervals the series are replaced by integrals which may be found by limiting processes. Tables of Green's Functions have been compiled by the author from these formulas which will be published later.

SUR LES PROBLÈMES MIXTES HARMONIQUES EN HYDRODYNAMIQUE

Par BASILE DEMTCHENKO, Paris

Nous développons une méthode analytique permettant de traiter d'un point de vue tout à fait général plusieurs problèmes importants relatifs aux mouvements bidimensionnels des fluides parfaits imcompressibles en l'absence de forces extérieures. Nos recherches se réduisent dans les grandes lignes aux points essentiels suivants [1]:

1⁰ On résout le problème analytique qui consiste en la recherche d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un domaine simplement connexe ou doublement connexe connaissant sa partie réelle sur quelques arcs de la frontière et sa partie imaginaire sur le reste de la frontière.

2⁰ On établit la solution du problème mixte harmonique dans le cas où la fonction analytique que l'on cherche est cyclique.

3⁰ On donne la solution formelle du problème mixte inverse qui peut être formulé comme suit: étant données les valeurs d'une fonction harmonique sur toute la frontière Σ du domaine Ω et de sa dérivée normale sur n arcs λ_i de la frontière Σ, déterminer ces arcs λ_i connaissant le reste de la frontière.

En passant maintenant aux applications hydrodynamiques de la théorie précédente nous nous arrêtons aux problèmes suivants.

4⁰ Nous étudions le problème de la formation des cavitations sur la surface d'un corps dans un liquide parfait incompressible soit à la suite de la mise brusque en mouvement, soit à la suite de la chute de la pression extérieure.

5⁰ Nous traitons les surfaces de glissement dans un courant uniforme acyclique s'écoulant dans un espace simplement connexe comme un cas particulier du problème mixte inverse. La méthode employée donne la possibilité de faire rapidement un devis des conditions et des paramètres. Une classification générale des problèmes relatifs aux surfaces de glissement s'impose ensuite tout naturellement. Nous envisageons le problème général d'ordre n, en appelant l'ordre du problème le nombre des surfaces de glissement.

6⁰ Nous donnons aussi la solution générale du problème des surfaces de glissement dans l'espace doublement connexe.

7⁰ Nous développons finalement la théorie des tourbillons et des sources dans un liquide limité par des surfaces de glissement et des parois rigides. C'est une généralisation des problèmes traités dans 5⁰ et 6⁰.

[1]) Pour les détails voir le Mémoire de l'auteur qui porte le même titre et qui paraîtra prochainement dans le Journal de Mathématiques pures et appliquées. Voir aussi Comptes rendus de l'Académie des Sciences: t. 189, 1929, p. 725; t. 190, 1930, p. 918; t. 192, 1931, p. 141; t. 192, 1931, p. 604; t. 192, 1931, p. 272

HARMONICS ASSOCIATED WITH CERTAIN INVERTED SPHEROIDS

By DOROTHY WRINCH, Oxford

A group of classical problems of hydrodynamics and electrostatics, which have lately attained a new interest in view of possible biological applications, may be described as follows. A function V satisfying Laplace's equation $\nabla^2 V = 0$ is required, which is evanescent on S the sphere at infinity, takes a special form on a closed surface s and is free from singularities or has certain prescribed singularities in the region between S and s.

These problems have been fully discussed in a number of cases: when s is an anchor ring, when s is a prolate or oblate spheroid, when s is a surface of revolution approximating to a spheroid, when s has conal boundaries, *inter alia*.

In this communication harmonic functions—and also the associated Stokes stream functions—are constructed for surfaces obtained by inverting prolate spheroids with respect to a point on the axis of figure, which allow the solution of these problems in cases where there is symmetry about this axis. If the eccentricity of the original prolate spheroid and the position of the centre of inversion be varied, a wide variety of surfaces with varying degrees of asymmetry fore and aft result, which, particularly in electrostatic problems, are likely to be of interest. Specially noteworthy is the degenerate case of the rod, whose degree of asymmetry, measured by the relative curvatures of the two ends may be of any specified order.

UNA PROPRIETÀ INTEGRALE DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DEL CALORE E SUE APPLICAZIONI

Di MAURO PICONE, Napoli

Nell' interno della semistriscia S, del piano (x, y), definita dalle limitazioni

$$a' \leqq x \leqq a'', \quad y \geqq 0,$$

la funzione $u(x, y)$ sia soluzione dell' equazione del calore:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

allora sotto certe condizioni di comportamento all' infinito e sull' asse delle x si dimostra che, comunque si fissi il numero reale a interno all' intervallo (a', a'') e il numero complesso t di parte reale positiva, la u verifica la seguente equazione integrale:

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-ty}\, u(x,y)\, dy =$$

$$= \alpha(t) \cosh(\sqrt{t}x) + \beta(t) \operatorname{senh}(\sqrt{t}x) - \frac{1}{\sqrt{t}} \int_a^x u(\xi, 0) \operatorname{senh}[\sqrt{t}(x-\xi)]\, d\xi ,$$

$\alpha(t)$ e $\beta(t)$ designando due funzioni della sola variabile t, olomorfe nel semipiano luogo dei numeri complessi di parte reale positiva.

Siano ora assegnati due funzionali lineari L_1 e L_2, eliminanti x e tre funzioni $f(x)$, $f_1(y)$ e $f_2(y)$. Sotto certe larghissime condizioni, l'equazione (2) consente il calcolo numerico della soluzione della (1), supposta esistente e determinata, verificante le equazioni:

$$(3) \quad \begin{cases} u(x, 0) = f(x), & a' < x < a'', \\ L_1\, u(x,y) = f_1(y), \quad L_2\, u(x,y) = f_2(y), & y \geqq 0. \end{cases}$$

Posto, sotto le dette condizioni,

$$L_i[\cosh(\sqrt{t}\, x)] = p_{i1}(t), \qquad L_i[\operatorname{senh}(\sqrt{t}\, x)] = p_{i2}(t), \qquad (i = 1,2)$$

$$L_i\left[\frac{1}{\sqrt{t}} \int_a^x f(\xi) \operatorname{senh}[\sqrt{t}(x-\xi)]\, d\xi\right] = q_i(t),$$

le (3) si traducono nelle seguenti equazioni lineari nelle funzioni incognite $\alpha(t)$ e $\beta(t)$:

$$(4) \quad \begin{cases} p_{11}(t)\,\alpha(t) + p_{12}(t)\,\beta(t) = q_1(t) + \int_0^\infty e^{-ty} f_1(y)\, dy, \\ p_{21}(t)\,\alpha(t) + p_{22}(t)\,\beta(t) = q_2(t) + \int_0^\infty e^{-ty} f_2(y)\, dy, \end{cases}$$

le quali, supposto $p(t) = p_{11}(t)\,p_{22}(t) - p_{12}(t)\,p_{21}(t)$ diverso da zero per qualsivoglia valore reale e positivo di t, forniscono $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ per i detti valori di t. Riesce dunque allora noto il secondo membro della (3), che indicheremo con $F(x,t)$, indicando con $F^{(n)}(x,t)$ la sua derivata n^{ma} rispetto a t. Dalla (2) si trae

$$\int_0^\infty e^{-y} y^n\, u(x,y)\, dy = (-1)^n F^{(n)}(x, 1),$$

e quindi, per ogni x, lo sviluppo in serie di $u(x, y)$ per polinomii di Laguerre, ciò che consente un buon metodo di calcolo della u in ogni intervallo finito dell' asse y, come ho potuto sperimentare in un' interessante applicazione fatta recentemente nell' Istituto di Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche Italiano.

Se, per un certo valore di x, la $u(x, y)$ ha, per $y \to \infty$, un limite determinato e finito $\lambda(x)$, si ha

$$\lim_{t \to 0} \int_0^\infty t e^{-ty} u(x, y)\, dy = \lambda(x),$$

onde segue che la temperatura di regime, per il detto valore di x, è data da

$$\lim_{t \to 0} [t F(x, t)].$$

Quando il determinante $p(t)$ risultasse nullo, per un certo valore di t, le condizioni di compatibilità del sistema (4) di equazioni danno condizioni necessarie per l'esistenza della u, e si hanno in tal caso esempi [cfr. un mio lavoro del Vol. III (1932) del *Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari*] di problemi lineari dotati di spettro continuo.

G. Doetsch e F. Bernstein, in un lavoro del Vol. 22 (1925) della Math. Zeitschrift (pag. 285), e segnatamente Doetsch, in successivi lavori dello stesso giornale, hanno, considerando essi pure la trasformata di Laplace della $u(x, y)$:

$$\int_0^\infty e^{-ty} u(x, y)\, dy,$$

approfondito il teorema d'esistenza e le condizioni di determinazione nel caso particolare classico che sia

$$L_1 u(x, y) = \lim_{x \to a'} u(x, y), \quad L_2 u(x, y) = \lim_{x \to a''} u(x, y).$$

Analysis

SOMMAZIONE COL PROCEDIMENTO DI POISSON DELLE SERIE DOPPIE DI FOURIER

Di MAURO PICONE, Napoli

Sia $f(x, y)$ una funzione reale delle variabili reali x e y sommabile (Lebesgue) su ogni insieme misurabile e limitato del piano (x, y). Per ogni punto $P(x, y)$ e per ogni coppia α, β di numeri positivi, indicheremo con $R(P, \alpha, \beta)$ il dominio rettangolare di punti estremi $(x-\alpha, y-\beta)$ e $(x+\alpha, y+\beta)$. I seguenti limiti:

$$\left.\begin{array}{l} \mu'(P) = \lim\limits_{(\alpha,\beta)\to o}{}' \\ \mu''(P) = \lim\limits_{(\alpha,\beta)\to o}{}'' \end{array}\right\} \frac{1}{\text{area } R(P, \alpha, \beta)} \iint\limits_{R(P,\alpha,\beta)} f(x, y)\, dx\, dy \qquad {}^{1})$$

si diranno, rispettivamente, *minima e massima media asintotica* della f nel punto P. Per un insieme misurabile A del piano diremo sua *minima e massima densità* nel punto P, rispettivamente, la minima e massima media asintotica in P della *funzione caratteristica* (de la Vallèe-Poussin) dell' insieme A. Gli insiemi misurabili A_1, A_2, ..., A_n del piano siano a due a due privi di punti comuni, ed il complementare di $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ sia vuoto od abbia misura nulla, laddove ciascun insieme ha nel punto P una densità determinata $\delta(P, A_k)$ e la $f(P)$ un limite determinato e finito, in tal caso si ha:

$$\mu'(P) = \mu''(P) = \sum_{k=1}^{n} \delta(P, A_k) \ [\lim_{Q\to P} f(Q) \, (\text{su } A_k)] \, .$$

La $f(x, y)$ verifichi ora le identità: $f(x + 2\pi, y) = f(x, y)$, $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$ e si abbia:

$$f(x, y) \sim \sum_{hk}^{0,\infty} t_{hk} \equiv \sum_{hk}^{0,\infty} \lambda_{hk} (a_{hk} \cos hx \cos ky + b_{hk} \cos hx \operatorname{sen} ky + c_{hk} \operatorname{sen} hx \cos ky + d_{hk} \operatorname{sen} hx \operatorname{sen} ky). \ {}^{2})$$

Sussistono i teoremi:

I° *La serie doppia*

$$I(\varrho, P) = \sum_{hk}^{0,\infty} \varrho^{h+k} \lambda_{hk} (a_{hk} \cos hx \cos ky + \ldots + d_{hk} \operatorname{sen} hx \operatorname{sen} ky)$$

riesce assolutamente ed uniformemente convergente per x e y comunque variabili e per ϱ variabile entro un qualsiasi intervallo (o, δ) di ampiezza $\delta < 1$.

---

[1]) Con lim′ e lim″ si indicano, rispettivamente, il minimo e il massimo limite.

[2]) $\lambda_{oo} = 1/4$, $\lambda_{ho} = 1/2$ (per $h > o$), $\lambda_{ok} = 1/2$ (per $k > o$), $\lambda_{hk} = 1$ (per $h > o$ e $k > o$).

II° *In quasi tutto il piano, e precisamente in ogni punto* $P_0(x_0, y_0)$ *nel quale le funzioni*

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} |f(x,y)|\,dy \quad , \quad \int_0^{2\pi} |f(x,y)|\,dx$$

hanno, ciascuna, minima e massima media asintotica (lineari) finite, si ha:

$$\mu'(P_0) \leqq \lim_{\rho \to 1}{}' \, I(\rho, P_0) \leqq \lim_{\rho \to 1}{}'' \, I(\rho, P_0) \leqq \mu''(P_0).$$

III° *In quasi tutto il piano, e precisamente in ogni punto* $P_0(x_0, y_0)$ *nel quale le due funzioni* (1) *hanno, ciascuna, minima e massima media asintotica (lineari) finite, ed inoltre, avendo significato* $f(x_0, y_0)$, *riesce*

$$(2) \qquad \lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{1}{\text{area}\, R(P_0, \alpha, \alpha)} \iint_{R(P_0, \alpha, \alpha)} |f(x,y) - f(x_0, y_0)|\,dx\,dy \right] = 0,$$

si ha:

$$\lim_{\rho \to 1}{}' \, I(\rho, P_0) = \lim_{\rho \to 1}{}'' \, I(\rho, P_0) = f(P_0).$$

Poichè:

$$I(\rho, P) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \left(t_{0,n} + t_{1,n-1} + \dots + t_{n-1,1} + t_{n,0}\right),$$

ne segue:

IV° *In quasi tutto il piano, e precisamente in ogni punto* $P_0(x_0, y_0)$ *nel quale le due funzioni* (1) *hanno, ciascuna, minima e massima media asintotica (lineari) finite, se la serie doppia di Fourier della* f, *sommata per diagonali, converge, ha una somma compresa fra* $\mu'(P_0)$ *e* $\mu''(P_0)$. *In particolare, per esempio, se la* f *è limitata, in ogni punto in cui la sua serie doppia di Fourier, sommata per diagonali, converge, in particolare converge assolutamente, ha per somma la media asintotica della* f, *se tale media è determinata, ha dunque per somma la* f *se nel detto punto la funzione è continua.*

Analysis

LES GROUPES DE TRANSFORMATIONS ET LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ

Par J. LE ROUX, Rennes

La théorie des groupes de transformations de Lie fournit une méthode générale et régulière pour l'étude du principe de relativité.

D'après l'énoncé d'Einstein, l'expression d'une loi physique doit être valable pour tous les systèmes de référence arbitrairement mobiles. Les équations qui la traduisent doivent donc former un système invariant par le groupe des changements de système de référence. On est amené ainsi à un problème étudié par Sophus Lie.

Toutefois la mobilité arbitraire des systèmes de référence nécessite la considération d'un mode de prolongement tenant compte de la variation simultanee des coordonnées et des paramètres. C'est le prolongement cinématique. Un groupe initial quelconque, complété par le prolongement cinématique constitue un groupe de relativité.

Un groupe de relativité n'adment d'autres invariants que ceux qui s'expriment à l'aide des invariants du groupe initial et de leurs différentielles. Cette propriété établit une différence essentielle entre le prolongement cinématique et le prolongement ordinaire ou prolongement statique.

Les changements de systèmes de référence qui se présentent en géométrie et en mécanique appartiennent aux groupes de transformations caractérisant, d'apres Lie, les systèmes géométriques. Dans le cas de la géométrie euclidienne c'est le groupe euclidien.

Les groupes de relativité qu'on en déduit jouent un rôle important en mécanique. Leurs transformations infinitésimales établissent, entre les notions fondamentales de la dynamique des ensembles, des liaisons insoupçonnées.

On en déduit un invariant différentiel à l'aide duquel il a été possible d'exprimer pour la première fois les lois de la dynamique et en particulier celles de la gravitation sous une forme synthétique entièrement indépendante de l'arbitraire mobilité des systèmes de référence.

Ces lois sont même indépendantes de tout choix particulier du temps et de toute considération de chronomètre. Mais il est possible de définir une variable auxiliaire, présentant elle-même un caractère invariant, qui permet de donner aux équations différentielles du mouvement la forme ordinaire des équations de la dynamique. Cette variable est le *temps canonique*.

ANALYTIC PROPERTIES OF THE CHARACTERS OF INFINITE ABELIAN GROUPS

By N. WIENER, Cambridge, U. S. A. and R. E. A. C. PALEY, Cambridge, England

Haar has recently discussed the characters of denumerable Abelian groups. The authors give an explicit method for obtaining these characters without the use of matrices, and extend the notion of character to a special class of non-denumerable Abelian groups. The characters form a group with respect to multiplication, and this group may be regarded as in a certain sense dual to the original group. The original group is isomorphic with a certain group of functions in the space of the characters, which will be orthogonal in the denumerable case. We have the following theorem: *Let f (c) be any function defined over the space of the characters. Let it possess an absolutely convergent series in the orthogonal functions just mentioned, and let it vanish for no character. Then 1/f (c) possesses an absolutely convergent series in the same set of functions.* From this we may deduce theorems analogous to the general Tauberian theorems of one of the authors. In such analogies, the orthogonal functions defined in characteristic space will be the generalizations of the functions exp inx.

The space of the characters must of course possess an intrinsic definition of measure to make integration and orthogonality possible. This intrinsic measure is easy to establish. We have not only an intrinsic definition of measure but an intrinsic notion of limit and of interval, neighborhood, etc. It is thus possible to set up a complete analogue to the notion of almost periodic function, replacing translation numbers by operators of the group. As one would expect, an almost periodic function turns out to be one which may be approximated uniformly by a polynomial in the analogues of the trigonometric functions in the space of characters. The Wiener theory of generalized harmonic analysis likewise possesses a precise analogue in character space.

The Walsh orthogonal functions form an example of a set of our orthogonal functions in character space. We present many other similar examples.

Analysis

LE GROUPE DES TRANSFORMATIONS CONFORMES DANS L'ESPACE DE HILBERT

Par J. DELSARTE, Nancy

J'ai donné, dans diverses publications [1]), une méthode générale de détermination des groupes de transformations linéaires de l'espace de *Hilbert,* qui laissent invariante une forme quadratique fonctionnelle donnée. J'ai montré qu'on obtenait toutes les transformations du groupe en ajoutant à la transformation identique la résolvante, prise pour la valeur $\lambda = \frac{1}{2}$ du paramètre, d'une transformation infinitésimale du groupe. Ces dernières s'obtiennent d'ailleurs immédiatement, et il est à remarquer qu'elles sont symétrisables gauches par la transformation linéaire symétrique définissant la forme quadratique invariée par le groupe.

Pour déterminer le groupe des transformations fonctionnelles invariant les angles dans l'espace de *Hilbert,* il suffit d'appliquer cette méthode à l'espace conforme fonctionnel dont un élément quelconque est formé par la réunion d'une fonction de carré sommable, $f(s)$, dans un intervalle donné, et de deux coordonnées numériques x et y. A un tel point de l'espace conforme fonctionnel, correspond une hypersphère de l'espace de *Hilbert* ayant pour équation

$$(x + i y)\ [F^2] - 2\,[F \cdot f] - (x - i y) = 0.$$

La notation $[f \cdot g]$ désigne, d'une manière générale, le produit scalaire des deux fonctions $f(s)$ et $g(s)$, de carrés sommables dans l'intervalle (a, b), c'est-à-dire l'intégrale de *Lebesgue*

$$\int_a^b f(s)\, g(s)\, ds\,;$$

Le rayon de cette sphère est proportionnel à la forme quadratique fonctionnelle

$$[f^2] + x^2 + y^2$$

On détermine d'abord le groupe des transformations linéaires de l'espace conforme invariant cette forme quadratique. Ces transformations sont du type

$$f'(s) = \mathfrak{L}[f(s)] + x\,\alpha(s) + y\,\beta(s)\,; \quad x' = [\gamma \cdot f] + Ax + By\,; \quad y' = [\delta \cdot f] + Cx + Dy,$$

---

[1]) Voir en particulier: *Les Groupes de Transformations linéaires dans l'espace de Hilbert;* Mémorial des Sciences Mathématiques, Paris, 1932.

où $\mathfrak{L}$ est une transformation linéaire convenable de l'espace de *Hilbert* ; on déduit ensuite de ce dernier groupe les formules définissant les transformations fonctionnelles non linéaires du groupe conforme cherché.

Les formules obtenues se prètent bien à l'étude des propriétés de ces transformations. On détermine sans peine les multiplicités invariées par une transformation générale du groupe. On rencontre ainsi une configuration formée d'une infinité d'hypersphères, qui n'est pas sans analogie avec le pentasphère orthogonal de *Darboux*. Quand la transformation envisagée présente certaines particularités, les multiplicités invarieés donnent naissance à des systèmes de multiplicités fonctionnelles généralisant, dans l'espace à une infinité de dimensions, les congruences paratactiques de l'espace ordinaire.

SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DU SECOND ORDRE QUI ADMETTENT UN GROUPE CONTINU FINI DE TRANSFORMATIONS

Par L. DES LAURIERS, le Saulchoir, Belgique

Le cas où le système differentiel est constitué par les équations des géodésiques d'un espace de Riemann a été partiellement traité par M. Fubini qui a utilisé les résultats de M. Levi-Civita touchant les espaces géodésiquement applicables ; mais l'examen du cas général exige une méthode différente. L'introduction de symboles, covariants avec le système, permet de déterminer l'ordre infinitésimal des transformations du groupe et d'obtenir une limitation du nombre de ses paramètres ($n^2—1$), le cas du groupe projectif général étant exclus. Mais cette limitation n'est pas assez restrictive pour qu'on puisse songer à déterminer dans chaque cas les différentes structures correspondantes. Ces structures coïncident d'ailleurs avec les structures de certains sous-groupes du groupe linéaire. La question de la similitude se posant, les variétés sistatiques s'introduisent d'elles-mêmes — elles fournissent d'ailleurs pour les systèmes du premier ordre des intégrales premières et ce résultat peut être généralisé. Le cas le plus simple est celui d'une variété sistatique dérivant d'un couple. En d'autres termes le groupe contient alors deux transformations infinitésimales du type X, $\varphi(x) \cdot X$. On peut alors considérer l'ensemble de tous

les couples contenus dans le groupe. Une méthode mixte utilisant simultanémen les restrictions imposées au groupe par ses équations de définition, et les restriction imposées au système du fait qu'il admet un groupe permettent alors de conclure qu

1) les transformations de base de tous les couples forment dans le groupe un sous groupe abélien,

2) si on désigne par X_i les fonctions de base des couples, par φ_α, une fonctio multiplicatrice quelconque on a toujours $X_i\ \varphi_\alpha = 0$ ou 1, à moins que le groupe n soit intransitif,

3) On peut toujours isoler, par changement de variables, les transformation couples, c'est-à-dire qu'en supprimant dans les autres transformations du groupe le termes qui correspondent à des variables sur lesquelles opèrent les transformation formant des couples, on obtient un groupe raccourci :

a) qui ne contient plus ces mêmes variables, à moins que le groupe dont on part n soit intransitif, auquel cas elles figurent comme paramètres ;

b) qui est admis par un système du second ordre ;

c) dont les transformations jouissent quant à leur ordre infinitésimal, des même propriétés que celles du groupe initial.

On peut alors se borner à des groupes qui ne renferment plus de couples.

Les systèmes triples — constitués par $Y = \varphi_1,\ X_1 + \varphi_2 X_2$ où X_1, X_2, Y son trois transformations du groupe, φ_1 et φ_2 n'étant pas des constantes — donnen lieu à une nouvelle détermination. Leurs transformations de base sont encore per mutables, mais de plus le nombre des types de tels systèmes est limité : ils corres pondent au cas où les invariants de certaines substitutions linéaires sont nuls. Ce résultats peuvent en partie s'étendre par récurrence et permettent de résoudre im médiatement le cas $n = 3$.

SUR L'UNICITÉ DES INTÉGRALES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, APPLICATION A LA DYNAMIQUE DU POINT

Par A. MARCHAUD, Marseille

1° Soit un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = F(x_1, \ldots, x_n;\ t), \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

où les F_i sont continues. Désignons par $\vec{x}$ et $\vec{F}(\vec{x}, t)$ les vecteurs de composantes x_i et F_i. Le système (1) s'écrira sous forme vectorielle

$$(1)' \qquad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, t).$$

La considération du produit scalaire $(\vec{x} - \vec{y}) \cdot [\vec{F}(\vec{x}, t) - \vec{F}(\vec{y}, t)] = P(\vec{F})$ permet d'étendre immédiatement au système (1) le Théorème de comparaison de *Tonelli-Montel* [Bul. Sc. Math. Juil. 1926, p. 214] et le critère de *Iyanaga* [Jap. Journ. of Math. 1928, p. 253]. On obtient ainsi sous forme géométrique l'extension des critères d'unicité connus relatifs au cas $n = 1$ [1]).

2⁰ En particulier dans le cas où $P[F]$ satisfait à l'inégalité

$$P(\vec{F}) = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot [\vec{F}(\vec{x}, t) - \vec{F}(\vec{y}, t)] \leqq |\vec{x} - \vec{y}| \cdot g\,[|\vec{x} - \vec{y}|, t]$$

où $g(r, t)$ est continue et $\geqq 0$, on peut affirmer que si $\vec{X}(t)$ et $\vec{Y}(t)$ sont deux intégrales quelconques on a, pour $t \geqq 0$, $|\vec{X}(t) - \vec{Y}(t)| \leqq \varrho(t)$, où $\varrho(t)$ représente 1 intégrale supérieure droite de

$$\frac{dr}{dt} = g(r, t)$$

prenant la valeur $|\vec{X}(0) - \vec{Y}(0)|$ pour $t = 0$. [Théor. de comp. de Tonelli.]

Lorsque cette dernière équation a une intégrale droite unique issue de $(0, 0)$, l'unicité des intégrales à droite de (1) [définies par leur valeur pour $t = 0$] est assurée. Considérons alors un vecteur $\vec{R}(\vec{x}, t)$ tel que le produit $P[\vec{R}]$ soit $\leqq 0$, l'unicité des intégrales à droite de

$$(2) \qquad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, t) + \vec{R}(\vec{x}, t)$$

sera assurée, a fortiori.

3⁰ Soit un point M soumis à une force fonction continue de M, de sa vitesse $\vec{v}$ et du temps, et de plus à une résistance opposée à $\vec{v}$, l'intensité de cette résistance étant une fonction continue de $(|\vec{v}|, t)$, non décroissante de $|\vec{v}|$ et nulle avec $\vec{v}$.

[1]) L'unicité des intégrales du système (1) a fait l'objet de divers travaux, cités dans un article de *M. E. Kamke* [Sitz. ber. d. Heidelberg. Ak., Jahrg. 1930, p. 3-15]. Ce travail contient un critère très général dû à l'auteur, qui a eu l'obligeance de me signaler que sa demonstration permet d'établir le résultat 2⁰ de la présente note, quand $\vec{X}(0) - \vec{Y}(0) = 0$, sous des hypothèses plus larges.

Les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme (2), en désignant par $\vec{R}(\vec{x}, t)$ la contribution de la résistance. On constate aisément que $P[\vec{R}]$ est $\leqq 0$. Il en résulte que si le mouvement est déterminé par les conditions initiales (en vertu du critère indiqué au n⁰ précédent) lorsqu'on néglige la résistance, il en est de même, a fortiori, quand on en tient compte.

LA PROPRIÉTÉ DE DARBOUX DU JACOBIEN GÉNÉRALISÉ

Par W. WILKOSZ, Cracovie

Définissons le jacobien généralisé sphérique au point P, appartenant au champ d'une transformation ponctuelle continue

$$Q = f(P) \tag{1}$$

dans l'espace à un nombre quelconque des dimensions comme limite :

$$\lim_{\rho|0} \frac{|\sigma'|}{|\sigma|} = I(P) \tag{2}$$

Dans cette expression σ désigne la sphère contenue dans le champ de la transformation (1) ayant le point P à son intérieur, σ' « l'image » de l'ensemble σ fourni par (1) et $|A|$ la mesure (extérieure) de l'ensemble A. Lorsque cette limite existe, sa valeur sera appelée: jacobien sphérique *non-centré,* par contre lorsque on envisage seulement les sphères σ, dont le point P constitue le *centre,* la limite précédente nous donne le jacobien sphérique *centré.*

Supposons le jacobien existant et cela en tout point du champs de la transformation considérée.

L'exemple très simple :

$$X = x; \quad Y = \left.\begin{matrix} 4y \\ 0 \\ 2y \end{matrix}\right\} \text{ pour } \left\{\begin{matrix} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{matrix}\right.$$

d'une transformation *biunivoque* du plan entier, dans laquelle le jacobien *centré* existe partout et ne prend que trois valeurs distinctes : 2, 3, 4, nous montre, que même pour

une transformation *biunivoque* la propriété de Darboux n'a pas lieu pour ce genre du jacobien. Au contraire, une démonstration assez longue, s'appuyant sur la généralisation du théorème bien connu de Vitali, généralisation, que M. Rademacher nous a donné dans sa thèse de l'an 1916, nous permet d'affirmer, que le jacobien *non-centré* d'une transformation continue et *biunivoque,* supposé existant en tout point de son champ y possède la propriété de Darboux.

La démonstration détaillée de ce résultat, que je crois nouveau, paraîtra prochaînement dans les Annales de la Société Mathématique Polonaise.

SUR LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES DÉFORMATIONS CONTINUES

Par W. WILKOSZ, Cracovie

Considérons une déformation dans l'espace à n-dimensions donnée par les formules

$$(1) \qquad y_i = f_i\,(x_1, \ldots\ldots x_n) \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ n$$

et supposons que :

1⁰ les fonctions $f_1, \ldots\ldots f_n$ possèdent des dérivées partielles du 1er ordre finies en tout point du domaine (D) de la transformation (1);

2⁰ les relations :

$$\sum_{k|1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)^2 = 1 \qquad i \,|\, 1,\ 2,\ \ldots\ldots n$$

$$\sum_{k|1}^{u} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = 0 \qquad i \,|\, 1,\ 2 \underset{i \neq j}{\ldots\ldots}\ n$$

sont satisfaites en chaque point du domaine (D); alors la déformation (1) se réduit à un déplacement dans l'espace (mouvement ev. suivi d'une symétrie).

La démonstration de ce théorème facile, lorsque on suppose comme dans les Traités classiques les fonctions f_i douées des dérivées de deux premiers ordres continus, devienne assez pénible et longue dans les hypothèses de la communication présente et dépasse les limites destinées pour une communication dans les Acta de Congrès.

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y'' + q(x)y = 0$

Par M. BIERNACKI, Poznań

Je considère l'équation

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

où les fonctions $q(x)$ et $q'(x)$ sont positives dès que $x > x_0$.

I. Toute intégrale de (1) est bornée lorsque $x \to \infty$ par des valeurs positives.

II. Dans les deux cas suivants:

1° $q'(x)$ est non croissante, $\lim\limits_{x \to \infty} q(x) = \infty$

2° $q'(x)$ est non décroissante et le rapport $q\left(x + \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\right) : q(x)$ tend vers un lorsque $x \to \infty$

on peut affirmer que toute intégrale de (1) tend vers 0 lorsque $x \to \infty$.

III. Soient $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ les zéros réels d'une intégrale de (1)

$$(x_0 < x_1 < x_2 < \ldots) \qquad \text{L'on a } \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = 1.$$

VI Soit z_n le zéro de $y'(x)$ qui est compris entre x_n et x_{n+1}. La quantité $\dfrac{z_n - \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}}{x_{n+1} - x_n}$ est positive, elle tend vers 0 lorsque n augmente indéfiniment et ne parcourt pas une suite d'entiers n_i tels que la somme $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_{n_{i+1}} - x_{n_i})$ est finie.

SUL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Di LEONIDA TONELLI, Pisa

Mi sono proposto di trattare la questione del minimo assoluto per l'integrale doppio

$$I_D[z] \equiv \iint\limits_D f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

(dove è $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$), con lo stesso metodo diretto da me sviluppato; nei miei « *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* », per gli integrali curvilinei, metodo che è basato sul concetto di semicontinuità.

Il campo D, sul quale viene calcolato l'integrale I_D, è aperto e limitato; e le funzioni $z(x, y)$ sono supposte, non soltanto continue, ma anche *assolutamente continue,* secondo la definizione di *assoluta continuità* da me posta nelle mie ricerche sulla quadratura delle superficie; e, naturalmente, son considerate, fra queste funzioni, solamente quelle per le quali I_D esiste finito. La classe $\mathfrak{C}$ delle superficie $S: z = z(x, y)$, in cui considero il minimo assoluto di I_D, è una classe *completa,* secondo la definizione di *assoluta continuità* da me posta nelle mie ricerche sulla dizioni più generali possibili per quanto riguarda il campo D, le superficie $z = z(x, y)$ e la classe $\mathfrak{C}$ di tali superficie.

Per la dimostrazione dell'esistenza del minimo di I_D occorre:

A) Scegliere un'opportuna successione minimizzante e dimostrare per essa l'esistenza di almeno una funzione limite continua.

B) Dimostrare che la funzione limite è assolutamente continua.

C) Dimostrare che, per la funzione limite, l'integrale I_D esiste finito.

D) Provare la semicontinuità inferiore di I_D sulla funzione limite.

La questione D) è stata da me tratta in una Memoria degli « Acta Mathematica » del 1929.

Delle altre questioni mi sono occupato in questi ultimi tempi e sono giunto ora a stabilire delle condizioni generali che consentono di risolvere A), B) e C).

Stabilita l'esistenza del minimo, importa studiare le proprietà analitiche della funzione minimante.

Se, tutti i punti di un campo aperto D', appartenente a D (ed eventualmente coincidente con D) sono punti di indifferenza per la funzione minimante, e sotto condizioni molto generali per la $f(x, y, z, p, q)$, la funzione minimante annulla la *variazione prima* di I sul campo D'.

Se poi (x_0, y_0) è un punto qualunque di D' e se si pone $x - x_0 = \varrho \cos \alpha$, $y - y_0 = \varrho \sin \alpha$, si ha, per quasi tutti i ϱ sufficientemente piccoli,

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\varrho} f_z \varrho \, d\varrho - \varrho \left[f_p \cos \alpha + f_q \sin \alpha \right] \right\} d\alpha = 0.$$

Di qui, in taluni casi importanti, si può passare facilmente all'equazione a derivate parziali delle superficie estremali.

Analysis

SULLE SERIE DOPPIE

Di LAMBERTO CESARI, Pisa

Il prof. Leja, in una Nota del 1930, ha mostrato come le classiche nozioni di convergenza di una serie doppia, per righe, per colonne, per diagonali, siano dei casi particolari della più generale nozione, da Lui introdotta, di convergenza in una direzione.

È noto poi che l'ordinaria nozione di convergenza delle serie doppie data da Stolz e Pringsheim (e che noi chiameremo convergenza ordinaria) non implica la convergenza per righe, per colonne, e per diagonali, fatto che noi abbiamo potuto estendere a tutte le direzioni.

Tuttavia noi abbiamo potuto dimostrare che, *se una serie doppia converge in senso ordinario ad una somma S, ed ha il termine generale tendente a zero al crescere della somma degli indici, essa serie converge secondo le medie del Cesaro, in tutte le direzioni, escluse quelle corrispondenti alla sommazione per righe e per colonne, alla medesima somma S.* Da ciò segue che ogni serie doppia convergente in senso ordinario ed a termine generale tendente a zero al crescere della somma degli indici, ha la stessa somma in ogni direzione nella quale essa converge.

La condizione qui espressa, relativa al termine generale, in tutti i casi che ordinariamente si presentano nelle applicazioni è soddifatta. Ad esempio ogni serie doppia di Fourier soddisfa a tale condizione.

Noi abbiamo poi osservato che questa stessa condizione è necessaria per la convergenza in una qualsiasi direzione, a meno però di un particolare insieme numerabile di direzioni, per le quali tale condizione non è necessaria. Ora, avendo chiamate *irrazionali* le prime, si ha che non è possibile costruire serie doppie convergenti in senso ordinario e in una direzione irrazionale a somme diverse tra loro, e che, inoltre, ogni serie doppia, il cui termine generale non converge a zero al crescere della somma degli indici, può convergere soltanto in un numero finito al più in una infinità numerabile di direzioni.

La dimostrazione di queste proposizioni si trova nella mia Memoria: « *Sulle serie doppie* » (Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa, s. II, Vol. I°, 1932, pagg. 297—314).

SUL PROCEDIMENTO DI ARROTONDAMENTO DI SCHWARZ

Di ADOLFO DEL CHIARO, Pisa

Usando il procedimento di arrotondamento di Schwarz, viene dimostrato il teorema seguente:

Sia $\Psi(z)$ una funzione di z soddisfacente alle condizioni seguenti:

1º la $\Psi(z)$ è, per $z \geqq 0$, *non* negativa;

2º è, insieme con la sua derivata prima, continua e non decrescente.

Sia poi $f(x, y)$ una funzione continua nel dominio chiuso $\overline{D}$, corrispondente al dominio aperto e limitato D [1]), assolutamente continua in D, tale che sia

$$f(x, y) \geqq 0 \quad \text{in } D,$$
$$f(x, y) = 0 \quad \text{sulla frontiera di } D,$$

e tale inoltre che risulti finito l'integrale

$$I_D[f] \equiv \iint_D \Psi(\sqrt{p^2 + q^2})\, dx\, dy,$$

con

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Allora è

$$\text{(I)} \qquad I_C[\varphi] \equiv \iint_C \Psi(\sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2})\, dx\, dy \leqq I_D[f],$$

essendo $\varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$ la funzione corrispondente per arrotondamento alla $f(x, y)$, C il cherchio su cui viene definita la φ e

$$\bar{p} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \bar{q} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Nel caso in cui la Ψ sia sempre crescente, l'uguaglianza nella (1) ha luogo solamente quando il dominio D e la superficie $z = f(x, y)$ possono ottenersi per semplice traslazione del dominio C e della superficie $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

---

[1]) Il dominio chiuso $\overline{D}$ corrispondente al dominio aperto e limitato D è costituito da tutti i punti di D e della sua frontiera.

SULLA SEMICONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI DOPPI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Di SILVIO CINQUINI, Pisa

Al Congresso tenutosi a Bologna, il Prof. L. Tonelli ha comunicato le condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali doppi

$$I_D[z] = \iint_D f\big(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)\big)\, dx\, dy,$$

(ove $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$) su tutte le superfici della forma $z = z(x, y)$, *ove* $z(x, y)$ appartiene alla classe C delle funzioni definite e assolutamente continue nel campo D.

In questi ultimi due anni, mi sono proposto di far vedere, come si potessero ottenere altri risultati relativi alla semicontinuità degli integrali $I_D[z]$, seguendo i metodi che il Prof. Tonelli ha applicato nei Suoi „Fondamenti di Calcolo delle Variazioni" allo studio degli integrali curvilinei.

Questi risultati sono suddivisi in tre Memorie.

In una prima Memoria *(Annali die Matematica,* T. X) ho dato le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali $I_D[z]$ in tutto il campo di definizione della funzione $f(x, y, z, p, q)$ e relativamente alle funzioni della classe C.

In una seconda Memoria (in corso di stampa) ho invece ricercato le condizioni necessarie per la semicontinuità dell' integrale $I_D[z]$ su una data superficie, definita da una funzione della classe C; da queste condizioni si deducono immediatamente quelle per l'esistenza dell' estremo.

La terza Memoria (in corso di stampa negli *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa*) contiene invece delle condizioni sufficienti. Precisamente, premesso che dalle condizioni sufficienti stabilite dal Prof. Tonelli si deducono altrettante condizioni sufficienti per la semicontinuità dell' integrale $I_D[z]$ su una data superficie definita da una funzione della classe C, essa contiene altre condizioni per la semicontinuità dell' integrale $I_D[z]$ su una data superficie definita da una funzione della classe C.

SUR LES SÉRIES DE FIGURES D'UN FLUIDE EN ROTATION PERMANENTE ET ZONALE PEU DIFFÉRENTES DES ELLIPSOÏDES

Par WENCESLAS JARDETZKY, Belgrade

La méthode de Liapounoff permet de trouver certaines séries de figures d'un fluide, homogène ou hétérogène ($\varkappa = f\,(p)$), isolé dans l'espace et en rotation permanente et zonale ($\omega = \omega\,(s, \lambda)$, où s est la distance de l'axe de rotation, λ un paramètre). Le problème se ramène à la résolution d'une équation fonctionnelle:

$$U + \int \frac{\omega^2}{2f} ds^2 = \text{fonct.}\,(a)$$

a étant un paramètre qui définit les surfaces de niveau. Supposons que : 1° la densité $= 1 + \delta\,\varphi\,(a)$ et 2° le terme $\int \frac{\omega^2}{2f} ds^2$ soit développable en série entière absolument et uniformément convergente ordonnée suivant les puissances de λ. Les paramètres δ et λ étant assez petits, les figures cherchées diffèrent peu des ellipsoïdes de Maclaurin. L'équation des surfaces de niveau est de la forme :

$$\frac{x^2}{\varrho + 1} + \frac{y^2}{\varrho + 1} + \frac{z^2}{\varrho} = a^2\,(1 + \zeta)^2$$

pour la surface libre on a $a = 1$, pour le centre $a = 0$. La fonction ζ est représentée par une série double $\sum\limits_{i+j>0}^{\infty} \zeta_{ij}\,\delta^i\,\lambda^j$ ordonnée suivant les puissances entières des paramètres δ et λ (le cas d'un fluide hétérogène) ou par une série $\sum\limits_{1}^{\infty} \zeta_i\,\lambda^i$ (le cas d'un fluide homogène). Le potentiel U étant développable en série suivant les divers ordres par rapport à la fonction inconnue ζ qui a des valeurs petites, l'équation à résoudre prend la forme d'une équation intégrodifférentielle. La recherche des coefficients ζ_{ij} nous ramène à la résolution successive d'équations intégrales. Ces fonctions sont représentées par des séries de polynômes de Legendre $[P_{2n}\,(\cos\,\theta)]$, θ étant l'angle de la nutation sur la sphère ayant 1 pour rayon. Les coefficients de ces séries sont certaines fonctions de a. L'existence de la solution peut être démontrée par la méthode Liapounoff, — l'unicité par celle de M. L. Lichtenstein.

DIE ANWENDUNG VON FUNKTIONALTRANSFORMATIONEN IN DER THEORIE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND DIE SYMBOLISCHE METHODE (OPERATORENKALKÜL)

Von GUSTAV DOETSCH, Freiburg i. B.

Die symbolische Methode bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen (unbekannte Funktion Y) besteht darin, den transzendenten Differentiationsprozeß, z. B. nach der Variablen t: $\frac{\partial}{\partial t} Y$, durch den elementaren Prozeß der Multiplikation mit einer neu hinzutretenden Variablen p: pY, zu ersetzen, die entstehende algebraische oder Differentialgleichung zu lösen und in der Lösung, die eine Funktion von p ist: $Y = \varphi(p)$, p wieder durch $\frac{\partial}{\partial t}$ zu ersetzen, was dann auf die Frage führt, welche Bedeutung dem Operator $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ zuzuschreiben sei. Die reinen Symboliker machen meist Annahmen über $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu}$ mit beliebigem reellem ν (übrigens nicht immer dieselben) und führen die komplizierten Fälle durch Reihenentwicklungen auf Potenzen zurück, was manchmal auf das richtige, oft aber auf ein falsches Resultat führt.

Die richtige Einsicht, wie diese Methode zu begründen oder besser: wie ihr Gültigkeitsbereich abzugrenzen sei, vermittelt die Funktionalanalysis: Man ist bei dem obigen Prozeß von dem Bereich der betrachteten Funktionen (Oberbereich) vermittels einer Funktionaltransformation zu einem anderen Funktionenbereich (Unterbereich) übergegangen; der Zusammenhang ist so geartet, daß dem Differenzieren im Oberbereich gerade die Multiplikation mit der Variablen im Unterbereich entspricht. Von der symbolischen zur wirklichen Lösung übergehen heißt also, nach vollzogener Lösung im Unterbereich von diesem wieder in den Oberbereich zurückzukehren. Eine Begründung des symbolischen Kalküls liefern bedeutet mithin nichts anderes, als die vermittelnde Funktionaltransformation effektiv aufzustellen. Mit ihrer Hilfe kann man nämlich die Zusammengehörigkeit von Ober- und Unterfunktion genau verfolgen und z. B. auch die Frage klären, wann jene Reihenentwicklungen der Unterfunktion auf die richtige Oberfunktion (im Sinne der Konvergenz oder einer asymptotischen Darstellung) führen. — Diese Transformation

ist, wenn es sich um das Integrationsgebiet $t > 0$, bezw. $-\infty < t < +\infty$ handelt, die Laplace-Transformation

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st} \Phi(t)\, dt, \text{ bzw. } \varphi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \Phi(t)\, dt.$$

Sie ermöglicht (auf reellem Wege) eine völlige Aufhellung des Operatorenkalküls. — Da diese Transformationen sich durch dieselbe Formel

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{ts} \varphi(s)\, ds$$

umkehren lassen, so kann man auch die gesuchte Oberfunktion als ein solches komplexes Integral ansetzen. Diese von den meisten modernen Bearbeitern angewandte Methode verwischt den Unterschied zwischen den verschiedenen Problemen ($t > 0$, $-\infty < t < +\infty$, usw.) und ist übrigens nicht neu, da sie schon von Laplace und Cauchy (von letzterem in klarer Erkenntnis ihrer Beziehung zur symbolischen Methode) dargelegt worden ist.

ÜBER DIE LÖSUNG EINIGER RANDWERT-AUFGABEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

Von CH. H. MÜNTZ, Leningrad

Während die stationären bezw. statischen Aufgaben der mathematischen Physik, bei denen die vorgeschriebenen Randwerte — zugleich mit dem gesamten betrachteten Problem selbst — von der Zeit unabhängig sind, im großen und ganzen als gelöst zu betrachten sind, kann dies von den entsprechenden Aufgaben dynamischer Natur, bei denen also die Zeit explizite auftritt, kaum gesagt werden. Zwar gibt es auch hier gewisse Methoden, die prinzipiell zum Ziele führen, so etwa beim Wärmeleitungsproblem die von Poincaré angegebene Methode der Eigenfunktionen; indessen ist gerade die dabei notwendig werdende explizite Berechnung aller Eigenfunktionen nur bei besonders einfachem Gebiet faktisch durchführbar. Es dürfte daher von Interesse sein, eine Methode anzugeben, die derjenigen der klassischen Potentialtheorie

nachgebildet ist und daraufhin direkt zum Ziele führt. Es handelt sich darum, die gegebenen Gebietsränder derart mit verallgemeinerten einfachen bezw. doppelten Belegungen zu versehen, daß man nun wiederum auf lösbare Integralgleichungen geführt wird; und zwar entstehen hier, im Gegensatz zur eigentlichen Potentialtheorie, lineare Integralgleichungen zweiter Art vom *Volterra*schen Typus.

Das jeweilige Problem — wir behandeln hier die fraglichen ebenen und räumlichen Aufgaben der Wärmeleitung, der Wellenausbreitung und der Elastizitätstheorie — kann zunächst mit Hilfe klassischer Formeln auf den Anfangszustand Null reduziert werden; ebenso kann das gegebene Gebiet der Aufgabe als quellenfrei angesehen werden. Es muß daraufhin jeweilig bloß ein passendes allgemeines Wirkungsgesetz für ein gerichtetes Element der genannten speziellen Art von Belegung gefunden werden.

Wir beginnen mit der Wärmeleitung; die Bezeichnungen (in kartesischen Koordinaten) sind die üblichen, der gesamte Rand (σ) bezw. (ω) kann auch mehrfach zusammenhängend sein.

Das Wärmepotential der einfachen ebenen Belegung ist:

$$A = \int_0^t d\tau \int_{(\sigma)} \frac{\alpha(\sigma, \tau)}{2\pi(t-\tau)} e^{\frac{-r^2}{4k(t-\tau)}} d\sigma,$$

bei Doppelbelegung hat man daraufhin im inneren Integral die Ableitung nach der Normalen zu nehmen. Bei räumlicher Wärmeleitung gilt:

$$A = \int_0^t d\tau \int_{(\omega)} \frac{\alpha(\omega, \tau)}{\pi \sqrt{2\pi k}\,(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4k(t-\tau)}} d\omega,$$

mit dem gleichen Uebergang zur Doppelbelegung.

Das Potential einer einfachen ebenen Wellenbelegung für die Geschwindigkeit a ist für ein Element der ξ-Axe:

$$A = \frac{a}{\pi} \int_0^{t-\frac{y}{a}} d\tau \cdot \alpha(\xi, \tau) \,.\, \operatorname{artg} \frac{Y \sin\theta}{y} \cdot Y \sin\theta \cdot d\theta;$$

$$\xi = x + Y\cos\theta, \quad Y = \sqrt{a^2(t-\tau)^2 - y^2} \geq 0,$$

im räumlichen Falle aber, für ein Element der $\xi\eta$-Ebene:

$$A = \frac{a}{4\pi}\int_0^{t-\frac{z}{a}} d\tau \cdot \alpha(\xi,\eta,\tau) \cdot \frac{\mathfrak{T}^2 \sin 2\theta \, d\theta \, d\varepsilon}{\sqrt{\mathfrak{T}^2 \sin^2\theta + z^2}} ;$$

$$\xi = x + \mathfrak{T}\cos\theta\cos\varepsilon, \quad \eta = y + \mathfrak{T}\cos\theta\sin\varepsilon, \quad \mathfrak{T} = \sqrt{a^2(t-\tau)^2 - z^2} \geqq 0.$$

Für die entsprechenden Doppelbelegungen sind wiederum die Ableitungen nach y bezw. z zu nehmen.

Die Potentiale der Elastizitätstheorie sind in bekannter Weise aus denjenigen der Wellengleichungen für die longitudinalen bezw. die transversalen Schwingungen zu bilden.

DÉTERMINATION EXPLICITE DE CERTAINS MINIMA[1])

Par MAURICE JANET, Caen

On sait que le minimum de $\dfrac{\int_a^b y'^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}$ pour une fonction qui s'annule aux deux extrémités de l'intervalle (a, b) est $\left(\dfrac{\pi}{b-a}\right)^2$.

Quel est le minimum de $\dfrac{\int_a^b (y^{(n)})^2\,dx}{\int_a^b (y^{(n-p)})^2\,dx}$ pour une fonction qui s'annule ainsi que ses $n-1$ premières dérivées aux deux extrémités (a, b)?

Les méthodes classiques du calcul des variations (Legendre-Jacobi-Clebsch) per-

[1]) Cf. *G. Cimmino*, Bollettino dell' unione Matematica italiana 1929 et 1930; M. *Janet*, Bulletin des Sc. Math. 1929 et 1931 et C. R. Acad. Sc. t. 193 et 194.

[2]) La lettre j désigne la quantité $e^{\frac{i\pi}{p}}$.

mettent de démontrer rigoureusement que c'est $\left(\frac{2 u_{n,p}}{b-a}\right)^p$ où $u_{n,p}$ désigne la plus petite valeur positive de λ telle que l'équation

$$y^{(2n)} - (-1)^p \lambda^{2p} y^{(2n-2p)} = 0$$

ait une solution (non-identiquement nulle) nulle ainsi que ses $n-1$ premières dé rivées en -1 et en $+1$. On peut expliciter d'une manière fort simple ce résultat.

Posons

$$A_{-1}(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad A_0(x) = \sin x$$

$$A_{n+1}(x) - (2n+1) A_n(x) + x^2 A_{n-1}(x) = 0 \tag{1}$$

$u_{n,p}$ est le plus petit zero positif de l'équation[2]) suivante, en λ,

$$\| j^{-2hk} A_k(j^h \lambda) \| = 0 \tag{2}$$

où le premier membre représente sous forme condensée un déterminant: les différentes valeurs de h: 0, 1, 2, ... $p-1$ correspondant aux p colonnes, les différentes valeurs de k: $n-2p$, $n-2p+1$, ... $n-p-1$ aux p lignes. En utilisant la relation (1) qui lie trois A d'indices consécutifs, on peut transformer cette équation en la suivante:

$$\| A_k(j^h \lambda) \| = 0 \tag{3}$$

où h correspondant aux différentes colonnes prend encore les valeurs 0, 1, 2 ... $p-1$ et où k correspondant aux différentes lignes prend cette fois les valeurs $n-p-1$, $n-p$, ... $n-2$.

On pourrait traiter des questions analogues donnant comme cas limites certains des résultats précédents, et ayant l'avantage de ne faire appel à aucun choix fixé a priori de conditions initiales.

C'est ainsi qu'en cherchant le minimum de

$$\frac{\int_a^b y'^2\, dx + h(y_a^2 + y_b^2)}{\int_a^b y^2\, dx}$$

où h est une constante donnée, on arrive finalement à la conclusion:

Soit (C) la courbe décrite par le point de coordonnées cartésiennes (ξ, η)

$$\xi = \frac{t(1+\cos t)}{t+\sin t} \qquad 0 \leqq t \leqq \pi \qquad \eta = t^2 \frac{t-\sin t}{t+\sin t}$$

branche «descendante» allant de $(0, \pi^2)$ à $(1, 0)$

$$\xi = \frac{t(1+ch\,t)}{t+sh\,t} \qquad 0 \leqq t \qquad \eta = t^2 \frac{sh\,t - t}{sh\,t + t}$$

branche «ascendante» allant de $(1, 0)$ à (∞, ∞).

Posons

$$X = \frac{\frac{1}{2}(y_a^2 + y_b^2)}{\frac{1}{b-a}\int_a^b y^2\,dx} \qquad Y = \frac{(b-a)^2 \int_a^b y'^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}.$$

Le point X, Y ne peut se trouver que dans la région «au-dessus» de C ou «sur» cette courbe même.

Quand X tend vers 0, on retrouve comme cas limite le résultat rappelé au début.

INTEGRAZIONE CON QUADRATURE DEI SISTEMI A DERIVATE PARZIALI LINEARI E A COEFFICIENTI COSTANTI (IN DUE VARIABILI)

Di L. FANTAPPIÈ, Bologna

Vogliamo risolvere esplicitamente con sole quadrature il problema di Cauchy-Kowalewsky per il più generale di detti sistemi a derivate parziali che non sia di tipo parabolico, sistema che con un'opportuna sostituzione lineare a coefficienti costanti sulle n funzioni incognite $z_r(x, y)$ può sempre ridursi alla forma:

$$(1) \qquad \frac{\partial z_r}{\partial x} + \mu_r \frac{\partial z_r}{\partial y} = \sum_1^n {}_k c_{rk} z_k + f_r(x, y) \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

in cui μ_r sono i coefficienti di direzione delle rette caratteristiche, c_{rk} costanti, e le $f_r\,(x, y)$ funzioni note, olomorfe nell' intorno di un tratto di curva Γ non tangente a nessuna caratteristica. Per ogni punto $P \equiv (x, y)$, abbastanza vicino a questo tratto, vogliamo determinare i valori di quelle soluzioni $z_r\,(x, y)$ che sul tratto Γ si riducono a funzioni assegnate (pure ivi olomorfe) $Z_r\,(x)$. Indicando perciò con $x_r = x_r(y - \mu_r x)$ l'ascissa del punto P_r, intersezione della caratteristica r^{esima} uscente da P con il tratto Γ, e con I_r l'operatore integrale

$$I_r f(x, y) = \int_{x_r}^{x} f\{t, y + \mu_r (t - x)\}\, dt = \bar{f}(x, y) \tag{2}$$

si verifica facilmente che le soluzioni cercate, definite dal sistema (1) con le date condizioni iniziali, sono anche univocamente definite come soluzioni del sistema integrale:

$$z_r\,(x, y) = \sum_{1}^{n}{}_k\, c_{rk} I_r z_k + I_r\, f_r + \omega_r\,(y - \mu_r x) \tag{3}$$

ove le $\omega_r(y - \mu_r x) = Z_r(x_r) = Z_r\{x_r(y - \mu_r x)\}$ sono pure funzioni note (regolari).

Se fosse possibile il calcolo con gli operatori I_r come se fossero quantità ordinarie, le soluzioni $z_k\,(x, y)$ sarebbero date dalle

$$z_k\,(x, y) = \sum_{1}^{n}{}_r\, B_{rk}(I_1, I_2, \ldots, I_n)\, I_r f_r + \sum_{1}^{n}{}_r\, B_{rk}\,(I_1, I_2, \ldots, I_n)\; \omega_r \tag{4}$$

essendo gli operatori B_{rk} funzioni di $I_1, I_2, \ldots, I_n$, corrispondenti alle funzioni razionali $B_{rk}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ date dagli elementi reciproci del determinante

$$\Delta\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 - c_{11}\,\lambda_1, & -c_{12}\,\lambda_1, \ldots\ldots\ldots & -c_{1n}\,\lambda_1 \\ -c_{21}\,\lambda_2, & 1 - c_{22}\,\lambda_2, \ldots\ldots\ldots & -c_{2n}\,\lambda_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -c_{n1}\,\lambda_n, & -c_{n2}\lambda_n, \ldots\ldots\ldots & 1 - c_{nn}\lambda_n \end{vmatrix} \tag{5}$$

Ma, applicando i risultati generali di una mia Memoria (Accad. d'Italia, vol. I, 1930) si trova che il calcolo degli operatori $g\,(I_r)$ è effettivamente possibile e rigo-

roso per ogni funzione analitica $g(\lambda)$ che sia olomorfa nell'origine, avendosi in questo caso

$$g(I_r)\,f = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0} \gamma_r(x, y;\ \lambda_r)\, g(\lambda_r)\, d\lambda_r \tag{6}$$

(residuo nell'origine) ove γ_r è data dall'operatore lineare L_r, applicato a f,

$$\gamma_r(x, y;\ \lambda_r) = L_r f = \frac{1}{\lambda_r} f(x, y) + \frac{1}{\lambda_r^2}\int\limits_{x_r}^{x} e^{\frac{x-t}{\lambda r}} f(t, y + \mu_r(t - x))\, dt \tag{7}$$

(funzione di λ_r singolare solo nell'origine). Poichè però gli operatori I_r sono fra loro permutabili, sarà possibile e rigoroso anche il calcolo di qualunque operatore $g(I_1, I_2, \ldots, I_n)$, corrispondente a una funzione analitica $g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ *che sia olomorfa nell'intorno dell'origine* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, avendosi come espressione effettiva di questo operatore

$$g(I_1, I_2, \ldots, I_n)\,f = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{C_0} d\lambda_1 \int\limits_{C_0} d\lambda_2 \ldots \int\limits_{C_0} d\lambda_n\, \gamma(x, y; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\, g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{8}$$

ove C_0 è una piccola curva chiusa racchiudente il solo punto singolare, situato nell'origine, della funzione integranda, e γ è il risultato dell'applicazione successiva alla funzione f di tutti gli n operatori lineari L_r, cioè

$$\gamma(x, y;\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = L_1 L_2 \ldots L_n f \tag{9}$$

che si calcola, per le (7), a partire da f con n quadrature.

Poichè gli operatori, funzioni di $I_1, I_2, \ldots, I_n$, che compaiono nelle formole di risoluzione (4) corrispondono a funzioni razionali di $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ il cui denominatore Δ ha il valore $1 (\neq 0)$ nell'origine, cioè a funzioni razionali che sono sempre regolari nell'origine, basterà applicare la formola generale (8) al calcolo di questi speciali operatori per avere in forma esplicita, con sole quadrature, le effettive soluzioni $z_k(x, y)$ del sistema differenziale (1), soddisfacenti alle date condizioni iniziali.

Analysis

SUR L'ÉQUATION INTÉGRALE DE FREDHOLM DANS LE DOMAINE COMPLEXE

Par RADU BADESCO, Cluj

L'équation intégrale du type Fredholm

$$\Phi(z) - \lambda \int_C K(z, s) \Phi(s) ds = \Psi(z) \tag{1}$$

où C est une courbe *fermée,* analytique et délimitant un domaine simplement connexe D, diffère essentiellement de celle où C est une courbe joignant deux points distincts, généralisation immédiate de l'équation classique de Fredholm. Les trois théorèmes établis par cet auteur ne s'étendent à l'équation (1) que dans des cas très particuliers. Dans le cas le plus simple d'un noyau $K(z, s)$, analytique en s sur tout le domaine D sauf en un seul point $\theta(z)$ [1], qui est un pôle ou un point singulier essentiel pour cette fonction, il y a des conditions suffisantes relatives à l'existence d'une solution $\Phi(z)$ de (1), jouissant des propriétés établies dans le cas cité par *Fredholm.* Il suffit [2] pour cela que la transformation [3] $Z = \theta(z)$, — où l'on suppose $\theta(z)$ fonction rationnelle de z — admette un cycle fixe attractif (ou un point fixe), et que les fonctions $\int_C K(z, s) \cdot ds$ et $\Psi(z)$ soient holomorphes autour des points de ce cycle, la première étant entière [4]. Le domaine d'existence dans le plan z de $\Phi(z)$ est contenu dans le domaine total d'attraction relatif au cycle.

L'existence d'un cycle attractif est un cas très particulier car la transformation mentionnée peut n'admettre que des cycles (ou points fixes) mixtes ou répulsifs. Dans le premier cas, il se présente une nouvelle caractéristique pour $\Phi(z)$, cette fonction admettant dans le plan λ des points singuliers essentiels à distance finie, mais distincts de l'origine. Dans le plan z, elle peut être définie dans l'intérieur du domaine total d'attraction relatif au cycle, s'il existe. Les solutions $\Phi(z)$ de (1) qu'on peut définir autour des cycles répulsifs, sont holomorphes en $1/\lambda$ au voisinage de l'origine de ce plan, ce point apparaissant comme singulier essentiel d'une espèce particulière. La résolution de (1) se rattache dans tous les cas cités à une équation fonctionnelle qui généralise les équations différentielles.

---

[1] variant ou non avec z. Le cas $\theta(z) \equiv 0$ a été traité par M. Wavre. Comptes rendus, t. 172, p. 432.

[2] l'unicité introduit certaines conditions supplémentaires sur $K(z, s)$.

[3] Si $\theta(z)$ est identique à une constante, par une simple transformation on ramène ce cas à celui étudié par M. Wavre.

[4] Ces propriétés s'étendent dans un cas très étendu, aussi à des fonctions $\int_C K(z, s)\, ds$ non nécessairement entières.

SUR LE PROBLÈME DE LA MESURABILITÉ DES ENSEMBLES DÉFINISSABLES

Par CASIMIR KURATOWSKI, Lwów

L'opinion que tous les ensembles et toutes les fonctions que l'on sait définir sont mesurables au sens de Lebesgue est très répandue. Dans l'état actuel des mathématiques, cette opinion ne semble pas être suffisamment justifiée. L'ensemble E dont je vais m'occuper ici, défini par des moyens tout à fait élémentaires, présente un exemple où il manque complètement de méthode pour décider si cet ensemble est mesurable ou non.

Définition de l'ensemble E. Imaginons toutes les sphères de rayon et des coordonnées du centre rationnels rangées en une suite $\{S_n\}$ bien déterminée (peu importe d'ailleurs quelle soit sa définition). Soit $x^{(n)}$ le n-ième chiffre du développement dyadique (infini) de x. Admettons, par définition, que *le nombre positif x appartient à E, lorsqu'à chaque y positif correspond un z irrationnel (positif) tel que la condition $x^{(n)} = 1$ implique que le point x, y, z soit situé en dehors de S_n.*

L'ensemble E est de la 4-ième classe projective ($CPCA$), sans être de classe inférieure[1]) (en vertu des propriétés du « crible » de M. Szpilrajn et moi, Fund. Math. 18, 168). Or, on ne sait rien concernant la mesurabilité des ensembles projectifs de classe si élevée (et — comme l'affirme M. Lusin, C. R. 180, p. 1817 — on ne le saura jamais!).

Pour se convaincre que E est de la 4-ième classe, on peut se servir de la méthode d'évaluation de classe à l'aide des symboles logiques (v. Fund. Math. 17); notamment, en désignant par $\prod_x$: « quel que soit x » et par $\sum_x$: « il existe un x tel que », il vient :

$$\{x \text{ appart. à } E\} \equiv \prod_y \sum_z [(z \text{ est irrat.}) \prod_n (x^{(n)} = 1) \rightarrow (xyz \text{ n'appart. pas à } S_n)].$$

L'ensemble des points xyz satisfaisant à la condition entre crochets [ ] est évidemment borelien. L'opérateur $\sum$ correspond à une projection (opération P), en vertu de fait général que, $f(x,y)$ étant une fonction propositionnelle, l'ensemble des x tels que $\sum_y f(x,y)$ est la projection parallèle à l'axe Y de l'ensemble des points xy tels que $f(x,y)$ (v. Kuratowski et Tarski, Fund. Math. 17, p. 243). L'opérateur $\prod$ équivaut à la négation de $\sum$ de la négation (formule de de Morgan), donc à l'opération CPC. L'ensemble E est donc $CPCA$.

---

1) Pour les définitions d'ensembles de classe n, v. Lusin, C. R. 180 (1925), p. 1572.

Il est enfin à remarquer que la condition entre crochets [ ] se laisse exprimer à l'aide des opérations logiques (somme logique, négation, Σ) effectuées sur trois ensembles de points : l'ensemble des nombres naturels, la parabole $y = x^2$, le plan $z = x + y$. Au point de vue géométrique, cela revient à dire (loc. cit.) que l'ensemble E s'obtient des trois ensembles précités à l'aide des 5 opérations suivantes : 1⁰ addition (d'ensembles), 2⁰ soustraction, 3⁰ projection parallèle à un axe, 4⁰ remplacement des points par des droites parallèles à un axe (de l'espace n-dimensionel où n est arbitraire), 5⁰ changement des axes (X en Y par exemple).

On voit ainsi que même parmi les ensembles obtenus d'une façon tellement élémentaire il y en a dont la mesurabilité présente un problème non-résolu.

ZUM MASSBEGRIFFE IN PRODUKTRÄUMEN

Von ST. ULAM, Lwów

Den Inhalt des Referates bildet die Darstellung einiger Resultate, die in Zusammenarbeit mit Herrn Z. Lomnicki erreicht wurden.

Es seien X, Y zwei abstrakte Räume, in denen für gewisse Mengen M (meßbare Mengen) ein Maß $m(M)$ definiert worden ist. Dabei werden keine topologische oder gruppentheoretische Voraussetzungen über die Natur der Räume gemacht. Es wird nun in dem Produktraume $X \times Y$ (d. h. dem Raume aller geordneten Paare (x, y), wo $x \varepsilon X$ und $y \varepsilon Y$) ein Maß eingeführt. Dies entspricht dem Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das darauf beruht, aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten (unabhängiger) Ereignisse auf die Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzter Ereignisse zu schließen.

Ueber das Maß in X (und analog in Y) und die Klasse $\mathfrak{M}$ der dort meßbaren Mengen machen wir folgende Voraussetzungen:

I. Der ganze Raum X ist meßbar: $X \varepsilon \mathfrak{M}$, so auch einzelne Elemente (x) des Raumes $(x) \varepsilon \mathfrak{M}$.

II. Aus $M_i \varepsilon \mathfrak{M}$ für $i = 1, 2, \dots n \dots$ folgt $\sum_{=1}^{\infty} M_i \varepsilon \mathfrak{M}$.

III. Aus M, $N \varepsilon \mathfrak{M}$ folgt $M - N \varepsilon \mathfrak{M}$.

IV. Ist $M \varepsilon \mathfrak{M}$ und $m(M) = 0$, $N \subset M$, so ist auch $N \varepsilon \mathfrak{M}$.

1. $m(X) = 1$; $m(M) \geq 0$.

2. $m\left(\sum_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(M_i)$ bei $M_i \cdot M_j = 0$ wenn $i \neq j$.

3. Aus $m(M) = 0$ und $N \subset M$ folgt $m(N) = 0$.

Bei diesen Voraussetzungen gilt der

Satz. Man kann in dem Raume $X \times Y$ ein Maß einführen, so daß Mengen von der Gestalt $M \times N$ meßbar sind und zwar das Maß $m(M) \cdot m(N)$ haben (dabei bedeuten M und N meßbare Untermengen von X resp. Y), und alle unsere Postulate weiter erfüllt bleiben.

Ein entsprechender Satz gilt für die abzählbaren Produkte d. i. Mengen $\mathfrak{P}(X_i) = X_1 \times X_2 \times \ldots X_K \times \ldots$ aller Folgen $\{x_i\}$, wo $x_i \varepsilon X_i$.

Im Zusammenhange mit Fragestellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden einige Eigenschaften dieses Maßes studiert. Eine ausführliche Darstellung erscheint demnächst in den *Fundamenta Mathematicae* (voraussichtlich Bd. 20).

QUELQUES PROPRIÉTÉS D'UN GROUPE D'ENSEMBLES PARFAITS ET LEUR APPLICATION A L'ÉTUDE DE LA FONCTION $\mathrm{m}\{E(\vartheta)\}$ DE M. D. MIRIMANOFF

Par S. PICCARD, Neuchâtel

Définitions. Soit ε ($0 < \varepsilon < 1$) un nombre positif fixe quelconque.

Appelons $\mathfrak{M}$ tout ensemble parfait construit sur un segment rectiligne $< A, B >$ par élimination successive d'intervalles noirs déterminés comme suit: soit σ_k un intervalle blanc donné de rang k (k = entier positif quelconque); à la $(k+1)$ *me* opération, nous éliminons de σ_k un intervalle noir δ_{k+1}, de longueur $\delta_{k+1} = \frac{\sigma_k}{1 + 2\varepsilon}$, bordé de deux intervalles blancs σ_{k+1}, de longueur chacun $\sigma_{k+1} = \varepsilon\, \delta_{k+1}$. Désignons par δ_0 l'intervalle noir constitué par les deux portions de la droite portant $< A, B >$ et extérieures à cet intervalle.

Soient $< a, b >$ et $< \alpha, \beta >$ deux intervalles situés sur un même axe Ox ($O = a < \alpha < b, \alpha < \beta, \alpha\beta \leq ab$). Construisons sur ces intervalles deux ensembles

semblables du type $\mathfrak{M}$ et désignons les respectivement par $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. Affectons de l'accent $'$ les données relatives à $\mathfrak{M}_2$.

$< \alpha, \beta >$ ayant une longueur fixe donnée, désignons par $\mathfrak{M}\{\alpha\}$ la mesure de l'ensemble des valeurs de α $(a < \alpha < b)$ pour lesquelles $\mathfrak{M}_1 . \mathfrak{M}_2 = 0$.

Lemme fondamental. La condition nécessaire est suffisante pour que les deux ensembles $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ ne puissent pas avoir de points communs et qu'il existe un nombre entier $k > 0$ et tel que tous les intervalles blancs de rang k de $\mathfrak{M}_2$ soient situés à l'intérieur d'intervalles noirs de $\mathfrak{M}_1$.

Proposition 1. L'intervalle $< \alpha, \beta >$ ayant une longueur fixe donnée, s'il n'existe point de valeur de α $(a < \alpha < b)$ pour laquelle les deux intervalles blancs $\sigma'_{1,1}$ et $\sigma'_{1,2}$ de rang un de $\mathfrak{M}_2$ soient situés simultanément à l'intérieur d'intervalles noirs de $\mathfrak{M}_1$, quelle que soit la valeur de l'entier $k > 1$ et quel que soit α compris entre a et b, il existe au moins un intervalle blanc de rang k de $\mathfrak{M}_2$ qui ne peut pas être situé à l'intérieur d'un intervalle noir de $\mathfrak{M}_1$.

Proposition 2. Si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on a $\mathfrak{M}\{\alpha\} > 0$, quel que soit $\alpha\beta \leqq ab$.

Proposition 3. Si $\varepsilon \geqq \frac{1}{2}$, quel que soit $\alpha\beta$ compris au sens large entre δ_1 et $\frac{\sigma_1}{\delta_1} ab$, il n'existe point de valeur de α pour laquelle $\mathfrak{M}_1 . \mathfrak{M}_2 = 0$.

Proposition 4. Si $\varepsilon \geqq \frac{1}{2}$ et si $0 < \alpha\beta < \delta_1$, ou si $\frac{\sigma_1}{\delta_1} ab < \alpha\beta \leqq ab$, on a: $\mathfrak{M}\{\alpha\} > 0$.

La fonction $\mathrm{m}\{E(\vartheta)\}$ *de M. D. Mirimanoff.*

Définition. Soit $\mathfrak{M}_x$ un ensemble parfait $\mathfrak{M}$ construit sur l'intervalle $< 0, 1 >$ de l'axe Ox et $\mathfrak{M}_y$ un ensemble identique construit sur l'intervalle $< 0, 1 >$ de l'axe Oy (coord. rect.). Désignons par $O\lambda$ un axe faisant avec Ox l'angle ϑ $\left(0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$. Menons par tous les points de $\mathfrak{M}_x$ des droites $||$ à Oy, par tous les points de $\mathfrak{M}_y$ des droites $||$ à Ox et projetons orthogonalement tous les points d'intersection de ces deux familles de droites sur $O\lambda$. Soit $E(\vartheta)$ l'ensemble de ces projections. La fonction $\mathrm{m}\{E(\vartheta)\}$ de M. D. Mirimanoff est la mesure de $E(\vartheta)$. [1]).

Proposition 5. Si $\varepsilon \geqq \frac{1}{2}$ et si $\frac{1}{1 + 2\varepsilon} \leqq tg\, \vartheta \leqq \varepsilon$, on a: $\mathrm{m}\{E(\vartheta)\} = \sin\vartheta + \cos\vartheta$.

Dans tous les autres cas, c.-à-d. si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, quel que soit $tg\, \vartheta$ compris au sens

---

[1]) Voir les mémoires de M. D. Mirimanoff: «Sur un problème de la théorie de la mesure», Fundamenta Mathematicae, t. IV, pp. 76—81 et pp. 118—123.

large entre O et 1, ou si $\varepsilon \geqq \frac{1}{2}$ et si $O \leqq tg\,\vartheta < \frac{1}{1+2\varepsilon}$ ou si $\varepsilon < tg\,\vartheta \leqq 1$, on a: $O \leqq \mathfrak{m}\{E(\vartheta)\} < \sin\vartheta + \cos\vartheta$.

Remarque. Si $tg\,\vartheta = \frac{1}{2}$, on a: $\mathfrak{m}\{E(\vartheta)\} = \sin\vartheta + \cos\vartheta = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

On en déduit la propriété suivante: si x et y sont deux nombres compris au sens large entre 0 et 1 et qui dans le système de numération à base quatre s'écrivent au moyen des seuls chiffres 0 ou 3, les sommes $x + 2y$ fournissent tous les nombres réels compris entre 0 et 3.

ON CERTAIN PROPERTIES OF THE FOURIER CONSTANTS OF L INTEGRABLE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

By CHARLES N. MOORE, Cincinnati

It is well known that the analogues of the theorems of Parseval and Riesz-Fischer for the Fourier constants of a function of a single variable hold for the doubly infinite array of Fourier constants associated with a function of two variables. The domain of applicability of these two theorems is the class L^2 of functions. For the class of L integrable functions we have no such simple results, but several criteria that a given set of constants shall be the cosine coefficients of an L integrable even function have been given. (Cf. W. H. Young, Proc. Lond. Math. Soc, ser. 2, vol. XII (1912), p. 41; S. Szidon, Math. Zs., vol. X (1921), p. 121; C. N. Moore, Proc. Nat. Acad. Sci., vol. XVIII (1932), p. 396.) It is shown in the last paper referred to that no one of these criteria includes either of the others.

It is the purpose of the present communication to extend these theorems to the Fourier cosine-cosine coefficients of an even-even function of two variables. For all three theorems we require the condition

$$\text{(A)} \qquad \lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} a_{mn} = 0 \text{ (all } m), \quad \lim_{m\to\infty} a_{mn} = 0 \text{ (all } n).$$

For the generalization of Young's criterion we add the condition

$$\text{B)} \qquad \Delta_{22}\, a_{mn} \geqq 0 \text{ (all } m,\ n),$$

where the symbol $\Delta_{2\,2}\, a_{m\,n}$ is used to denote the double second difference of the $a_{m\,n}$ with regard to the two subscripts. For the generalization of Szidon's theorem we use instead of (B)

(C) $$\sum_{p=2,\, q=2}^{\infty,\, \infty} \log p \ \log q \ |\Delta_{1\,1}\, a_{m\,n}| \text{ converges.}$$

For the generalization of the third criterion mentioned above, we add to (A) the requirement

(D) $$\sum_{m=0,\, n=0}^{\infty,\, \infty} m\, n\, |\Delta_{2\,2}\, a_{m\,n}| \text{ converges,}$$

and

(D_1) $$|a_{m\,n} \log m \ \log n\,| < M \quad \text{(a positive constant)}$$

for all (m, n). It is apparent that (D_1) includes (A) and that therefore (D_1) and (D) together constitute the desired sufficient conditions.

ON DEFINITIONS OF BOUNDED VARIATION FOR FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

By C. RAYMOND ADAMS and JAMES A. CLARKSON, Providence, U. S. A.

Several definitions have been given of conditions under which a function of two variables shall be said to be of bounded variation. Of these definitions six are usually associated with the names of Vitali, Hardy, Arzelà, Pierpont, Fréchet, and Tonelli, respectively. A seventh, formulated by Hahn and attributed by him to Pierpont, can readily be proved equivalent to Pierpont's definition. For convenience let the classes of functions satisfying the respective definitions be denoted by V, H, A, P, F, and T; in addition, let the class of continuous functions be designated by C, and let a product (such as $V \cdot T \cdot C$) stand for the subclass of functions common to the two or more

classes named. Then the only relations that seem to be already known among the several definitions may be indicated as follows:

$$P > A > H, \qquad A \cdot C > H \cdot C, \qquad F \geq V > H,$$
$$V \cdot C > H \cdot C, \qquad T \cdot C > A \cdot C, \qquad V \cdot T \cdot C = H \cdot C.$$

It is the purpose of the present paper to investigate rather thoroughly the further relations among the classes of functions satisfying the six definitions, and to examine some of the properties of the functions belonging to these classes. We first determine, in the case of each pair of classes, whether one includes the other or they overlap; for example, we find

$$T > H; \qquad P \not\geqq T,\ T \not> P; \qquad A \not\geqq T,\ T \not> A.$$

Next we obtain a complete set of similar relations among such sub-classes as $F \cdot B$, where B represents the class of bounded functions; for example,

$$F \cdot B > V \cdot B; \qquad A = A \cdot B \not\geqq T \cdot B,\ T \cdot B \not> A.$$

Additional relations are found among such sub-classes as $P \cdot C$, and still other relations concerning the extent of the common part of two or more overlapping classes; examples are the following:

$$T \cdot C \geqq P \cdot C > A \cdot C, \qquad P \cdot V = A \cdot V = V \cdot T = H,$$
$$P \cdot T > A \cdot T > A \cdot F = A \cdot F \cdot T > H, \quad T \cdot B > F \cdot T \cdot B > H.$$

Among the properties which functions of the several classes are found to possess are these. Let $\varphi(\bar{x})$ denote the total variation of $f(\bar{x}, y)$ in y alone (regarded as infinite when $f(\bar{x}, y)$ is not of bounded variation), and let $\psi(\bar{y})$ have a corresponding significance for $f(x, \bar{y})$. Then if $f(x, y)$ is of class P, the set E of points $\bar{x}$ $[\bar{y}]$ for which $\varphi(\bar{x})$ $[\psi(\bar{y})]$ is infinite can be everywhere dense in the interval of definition of $f(x, y)$, but it cannot be of positive interior measure. If $f(x, y)$ is of class F, $\varphi(\bar{x})$ $[\psi(\bar{y})]$ either is everywhere infinite or is bounded and integrable in the sense of Riemann.

RIDUZIONE A TIPI NORMALI ED EFFETTIVA INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI DISCONTINUE

Di L. LABOCCETTA, Roma

Considero qui delle funzioni univalenti, e che in uno o più punti in numero finito, o costituenti al più un insieme numerabile, dell' intervallo nel quale sono definite presentano delle discontinuità di una delle tre specie seguenti:

a) Tagli, punti cioè nei quali $F(c-0) = F(c+0) \neq F(c)$.

b) Salti semplici, punti cioè nei quali la funzione è continua solo a destra, $F(c-0) \neq F(c) = F(c+0)$, oppure è continua solo a sinistra, $F(c-0) = F(c) \neq F(c+0)$.

c) Salti con punti isolati, punti cioè nei quali la funzione è discontinua da ambo i lati, $F(c-0) \neq F(c+0)$, $F(c-0) \neq F(c) \neq F(c+0)$.

Alla effectiva integrazione di queste funzioni giungo mediante l'applicazione delle due proprietà ben note:

1. Due funzioni generalmente uguali in un intervallo dato, salvo al più in corrispondenza dei punti di un insieme di misura nulla, hanno, in quell' intervallo lo stesso integrale.

2. Una funzione discontinua, senza punti isolati, si può risolvere nella somma di una funzione continua, il „nucleo" di essa, e di una costante discontinua, la corrispondente „funzione dei salti".

Della prima proprietà mi servo per sostituire ad una funzione discontinua data una funzione ad essa equivalente, ma priva di punti isolati e dappertutto continua da uno dei lati, per es, a destra. Basta a tale scopo aggiungere alla funzione data una funzione puntiforme opportunamente scelta. Se la funzione data non aveva altre discontinuità che tagli, essa è in tal modo resa continua. Se essa comprendeva altre discontinuità della specie *b*), *c*), due casi possono presentarsi : 1) la funzione data, mediante opportuni spostamenti nei successivi intervalli, può essere ridotta alla somma di una funzione continua che ha una espressione analitica unica e di una costante discontinua (funzione dei salti; 2) tale unificazione analitica non è possibile nel modo anzidetto, con le funzioni ordinarie, ed allora la funzione si riduce ad una combinazione lineare di funzioni continue esistenti in successivi intervalli, più una funzione dei salti.

Nell' uno e nell' altro caso l'integrazione della parte discontinua è immediatamente eseguibile quando delle costanti discontinue si conoscano gl' integrali fondamentali, che ho già tutti indicati.

Le „funzioni dei salti" sono ottenute con la „sommazione" delle funzioni puntiformi che definiscono le discontinuità [1]).

ITERATIVE INTERPOLATION

By E. H. NEVILLE, Reading

For purposes of computation it is important to distinguish between a process and a formula. For example, the Legendre polynomial $P_n(x)$ can be written down explicitly for any particular integral value of n, but to compute a value such as $P_{15}(\frac{1}{2}\pi)$ from the polynomial for $P_{15}(x)$ rather than by 13 applications of the recurrence relation

$$n\,P_n(x) = (2n - 1)\,x\,P_{n-1}(x) - (n - 1)\,P_{n-2}(x)$$

with $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ would obviously be absurd. This paper describes a uniform process of interpolation which can be used in problems in which no general formula is to be expected, and which also is a practicable process in many cases in which a formula exists but direct substitution would be tedious.

The principle of the method is that if we are to estimate the numerical value of a function $u(x)$ for a particular argument X, there are many approximations of any one order, equally valid to that order, and their differences one from another reflect in a definite way their differences from the true value of $u(X)$. In certain cases the difference between two approximations, which of course is known, can be utilised for the calculation of a better approximation without further reference to tabulated values, by a process which is nothing more than linear interpolation between the first two values.

The process can be repeated to any extent. When tabular values of $u(x)$ only are used, it is a thoroughly practical means, even if the interval is irregular, of

[1]) Gl' integrali fondamentali e i metodi per la sommazione delle funzioni puntiformi sono indicati in tre mie note „Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue", R. C. R. Acc. Naz. dei Lincei, 19 Giugno 1932. —

computing the approximation which would be given by the general Lagrangian polynomial, for which purpose the explicit formula for this polynomial is well known to be all but useless. The problem of inverse interpolation is therefore solved, and interpolation near a boundary where one regular interval of tabulation gives place to another is effected without the use of bridging formulae. Even for interpolation when the interval is regular throughout, a process in which no table of coefficients is required, no differences have to be computed, and the full value of the argument can be used from the outset, has practical advantages which render an experimental comparison with the use of such a formula as Everett's most desirable.

When derivatives of $u(x)$ are introduced, the partial sums of Taylor series are themselves approximations of different orders, and the process can therefore utilise systematically whatever derivatives are available. The rapidity of convergence is sometimes striking: the values of $\sin x$ and its first two derivatives at two points separated by 15^{0} are sufficient to give accuracy to the seventh decimal place at any intermediate point.

An account of the method, with numerical examples, will appear in the *Journal of the Indian Mathematical Society,* vol. 20.

BESCHRÄNKTE ANALYTISCHE FUNKTIONEN UND STIELTJES-INTEGRALE

Von JULIUS WOLFF, Utrecht

Dieser Vortrag ist der Klasse derjenigen Funktionen $f(z) = f(x + yi) = u + vi$ gewidmet, welche regulär sind in der Halbebene D $(x > o)$ und dort einen positiven Realteil u besitzen.

Mittels der Nebenbedingung dass $f(z)$ eine asymptotische Entwicklung $f(z) \backsim \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$ für $z \longrightarrow \infty$ besitze, hat Herr R. Nevanlinna gezeigt, dass $f(z)$ durch ein Stieltjes-Integral dargestellt wird:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,\psi(y)}{z - yi},$$

wo $\psi(y)$ eine nicht-abnehmende Funktion ist.

Gezeigt wird daß, wenn jene Nebenbedingung unterdrückt wird, so daß also nur die Voraussetzungen: *$f(z)$ holomorph in D $(x > o)$ und $u > o$* übrig bleiben, eine ähnliche Darstellung gilt, nämlich

$$(1) \qquad f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - yi} + \frac{1}{1 + yi} \right) d\,\psi(y) + \lambda z + \mu \;\ldots\;[1])$$

Die nicht-abnehmende Funktion $\psi(y)$ ist auf folgende Weise mit $f(z)$ verknüpft: die Funktion $\psi(x, y) = \int_1^z (v\,dy + u\,dx)$ hat für jedes y einen endlichen Grenzwert, wenn x nach Null strebt; dieser Grenzwert ist $\psi(y)$.

Das Integral in (1) ist wieder ein Stieltjes-Integral. Die Konstante λ ist positiv oder null.

Wesentlich bei der Herleitung von (1) ist folgender Satz:

$$\textit{für } a > o \text{ ist } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,\psi(y)}{a^2 + y^2} \leqq \frac{\pi\, u(a)}{a}.$$

Wenn umgekehrt in (1) für $\psi(y)$ irgend eine nicht-abnehmende Funktion gesetzt wird, welche der Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,\psi(y)}{1 + y^2} < \infty$ genügt, für λ eine positive Zahl oder null, und für u eine Zahl mit genügend großem Realteil, so stellt (1) eine Funktion unserer Klasse dar.

Gezeigt wird wie die Haupteigenschaften dieser Funktionen aus (1) hervorgehen.

SUR LE PROBLÈME DE MOMENTS

Par MICHEL KRAWTCHOUK, Kiew

Soit

$$\omega_n(x) = x^n + a_1^{(n)} x^{n-1} + a_2^{(n)} x^{n-2} + \ldots \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

le polynôme satisfaisant dans l'intervalle (a, b) aux conditions d'orthogonalité:

$$\int_a^b \omega_n(x) \,.\, x^k \,.\, p(x)\, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1),$$

où la fonction $p(x)$ est bornée et non-négative. On a les résultats suivants:

[1]) Während des Kongresses stellte sich heraus, daß diese Darstellung schon von Herrn *Marcel Riesz* gegeben worden ist (Sur certaines inégalités . . ., Kungl. Fys. Sällsk. I Lund Förhanlinger, t. I, 1931).

A. S'il n'y a pas dans l'intervalle (α, β) $(a \leqq \alpha < \beta \leqq b)$ de racines du polynôme $\omega_n(x)$, alors on a:

$$\int_\alpha^\beta p(x)\,dx = \frac{h_n \lg n}{n} \int_a^b p(x)\,dx\,,$$

le nombre h_n étant une fonction bornée de n.

B. Si la fonction $P(x)$, monotone dans l'intervalle (a, b), vérifie les égalités:

$$\int_a^b x^k\,d\,P(x) = \int_a^b x^k p(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1),$$

alors on a:

$$\left| \int_a^x d\,P(x) - \int_a^x p(x)\,dx \right| < \frac{k \lg n}{n}\,,$$

où le nombre constant k se termine par la fonction $p(x)$ seule.

LES FONCTIONS MOYENNES ET LES INTÉGRALES DE STIELTJES

Par N. GUNTHER, Léningrade

Une fonction sommable $f(x)$ étant mal définie suivant sa nature même, on ne peut pas espérer l'obtenir par un calcul direct. Comme, au contraire, sa moyenne pour un domaine (ω) : $\frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} f(x)\,d\omega$ est bien définie, on peut présumer, que son introduction à la place de $f(x)$ peut rendre les calculs exacts et praticables. Remarquons, au surplus, que l'expérience ne conduit le physicien qu'à la connaissance des valeurs moyennes des objets de ces études et que la recherche d'une fonction de points à la place de sa valeur moyenne n'a pour effet, parfois, que les complications étrangères au problème. On sait bien, par exemple, que la série, qu'on obtient en développant suivant les fonctions de Sturm-Liouville la solution du problème du refroidissement d'une barre, donne cette solution que sous les conditions assez sévères imposées à la distribution initiale de la température. Or il est aisé de démontrer que le développement de la valeur moyenne de la fonction cherchée en série suivant les moyennes

des fonctions de Sturm-Liouville est convergente et donne pour le moment initiale la valeur moyenne de la température sous la seule condition qu'elle soit définie par une fonction qui n'est qu'à carré sommable. Il n'est donc pas privé d'intérêt de poser les problèmes de manière, que la fonction moyenne y entre directement et parvenir à un calcul, qui permet d'achever les opérations avec ces fonctions moyennes sans avoir recours à leur transformation à l'aide d'un passage à la limite dans les fonctions de points. Ce calcul est fourni par la théorie des intégrales de Stieltjes. Or, l'emploi des intégrales de Stieltjes étant établie pour les fonctions des domaines plus générales que la moyenne d'une fonction sommable, il y a lieu de généraliser cette dernière notion, ce qui ouvre des voies aux applications nouvelles. Les principales de ces applications se rattachent aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique et surtout aux problèmes liés au laplacien, comme j'ai montré dans mon mémoire des « Travaux de l'Institut Stekloff » [1]).

Mais on parvient aussi par l'intermédiaire du théorème des MM. Fr. Riesz et J. Radon relatif aux opérations linéaires continues, aux applications à la mécanique quantique en permettant de donner à plusieurs assertions une forme tout à fait rigoureuse.

ÜBER EINE NEUE DIFFERENTIALRECHNUNG FÜR FUNKTIONEN MEHRERER REELLER VERÄNDERLICHEN

Von KARL BÖGEL, Schulpforte

Wir beschränken uns hier auf Funktionen $f(x_1, x_2, x_3)$ von drei Veränderlichen. Eine solche nennen wir in (a_1, a_2, a_3) total differentierbar, wenn daselbst existieren:

1. Die drei partiellen Ableitungen $Dx_1 f$, $Dx_2 f$, $Dx_3 f$ (also die Grenzwerte der drei linearen Differenzenquotienten).
2. Drei „zweidimensionale Ableitungen" $D(x_1, x_2) f$, $D(x_2, x_3) f$, $D(x_3, x_1) f$, d. h. die zweidimensionalen Grenzwerte der zweidimensionalen Differenzenquotienten.

[1]) t. 1, 1932: Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique.

3. Die „dreidimensionale Ableitung" $D(x_1, x_2, x_3) f$ als dreidimensionaler Grenzwert des dreidimensionalen Differenzenquotienten.

Diese leicht kontrollierbare „totale Differentierbarkeit" ist hinreichend (aber nicht notwendig) für die Existenz des Stolz'schen totalen Differentiales; ihre Zugrundelegung ermöglicht den Aufbau einer geschlossenen Theorie der differentierbaren Funktionen. Ein Hauptsatz aus ihr ist folgender Mittelwertsatz:

„Es existiere

1. $D(x_1, x_2, x_3) f$ in $J_{1,2,3} = [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3]$
2. $D(x_1, x_2) f$ in $J_{1,2} = [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, a_3]$, ebenso $D(x_2, x_3) f$ in $J_{2,3}$ und $D(x_3, x_1) f$ in $J_{3,1}$.
3. $Dx_1 f$ in $J_1 = [a_1, a_2, a_3; b_1, a_2, a_3]$, ebenso $Dx_2 f$ in J_2 und $Dx_3 f$ in J_3.

Dann gibt es im Inneren von $J_{1,2,3}$ einen Punkt (p_1, p_2, p_3) derart, daß

$$f(b_1, b_2, b_3) - f(a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1) \cdot Dx_1 f(p_1, a_2, a_3) + \dots + \dots$$
$$+ (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot D(x_1, x_2) f(p_1, p_2, a_3) + \dots + \dots$$
$$+ (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) \cdot D(x_1, x_2, x_3) f(p_1, p_2, p_3)$$ gilt."

Dieser Mittelwertsatz ergibt, auf die Taylorentwicklung angewandt, einerseits die von Herrn Neder aufgestellte Form des Restgliedes auf neuem Wege, andererseits eine weitere interessante Form des Restgliedes. Setzt man nämlich

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\nu_3=0}^{n_3-1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2-1} \sum_{\nu_1=0}^{n_1-1} \frac{x_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \cdot \frac{x_2^{\nu_2}}{\nu_2!} \cdot \frac{x_3^{\nu_3}}{\nu_3!} \cdot (Dx_3)^{\nu_3} (Dx_2)^{\nu_2} (Dx_1)^{\nu_1} f(0,0,0) + R_{n_1,n_2,n_3}$$

(Stetigkeit der Ableitungen vorausgesetzt), so erhält man:

$$R_{n_1,n_2,n_3} = x_1^{n_1} \cdot \frac{(1-\vartheta_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \cdot \sum_{\nu_3=0}^{n_3-1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2-1} \frac{x_2^{\nu_2}}{\nu_2!} \cdot \frac{x_3^{\nu_3}}{\nu_3!} \cdot (Dx_3)^{\nu_3} (Dx_2)^{\nu_2} (Dx_1)^{n_1} f(\vartheta_1 x_1, 0, 0) + \dots$$

$$+ \dots + x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \frac{(1-\vartheta_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \cdot \frac{(1-\vartheta_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \cdot \sum_{\nu_3=0}^{n_3-1} \frac{x_3^{\nu_3}}{\nu_3!} \cdot (Dx_3)^{\nu_3} (Dx_2)^{n_2} (Dx_1)^{n_1} f(\vartheta_1 x_1, \vartheta_2 x_2, 0)$$
$$+ \dots + \dots$$

$$+ x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \frac{(1-\vartheta_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \cdot \frac{(1-\vartheta_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \cdot \frac{(1-\vartheta_3)^{n_3-1}}{(n_3-1)!} \cdot (Dx_3)^{n_3} (Dx_2)^{n_2} (Dx_1)^{n_1}$$
$$f(\vartheta_1 x_1, \vartheta_2 x_2, \vartheta_3 x_3).$$

Um R_{n_1,n_2,n_3} abzuschätzen, ist es also nur nötig, eine einzige Ableitung in einem dreidimensionalen Bereiche zu kennen, alle anderen vorkommenden in geringer dimensionierten.

Die zusammenfassende Theorie wird demnächst erscheinen.

SOME NEW CONVERGENCE CRITERIA FOR FOURIER SERIES

By G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, Cambridge

In this note we are concerned with the convergence of a Fourier series in the classical sense. We make the usual formal simplifications; we consider an integrable, periodic, and even function $\Phi(t)$, and investigate conditions under which its Fourier series $\Sigma a_n \cos nt$ converges to zero when $t = 0$. It is convenient to suppose also that the mean value of $\Phi(t)$ over a period is zero, so that $a_0 = 0$[1]).

Theorem 1. *If* (*i*)

$$\Phi(t) = o\left\{\frac{1}{\log |1/t|}\right\}, \tag{1}$$

and (*ii*)

$$a_n = O(n^{-\delta}) \tag{2}$$

for some positive δ, *then*

$$\Sigma a_n = 0. \tag{3}$$

Incidentally, we prove a theorem concerning the summability of Fourier series by Borel's exponential method.

Theorem 2. *If* $\Phi(t)$ *satisfies* (1), *then* Σa_n *is summable* (*B*) *to sum* 0.

THE SUMMATION OF FOURIER SERIES BY HAUSDORFF MEANS

By EINAR HILLE, Princeton and J. D. TAMARKIN, Providence, U. S. A.

The paper is devoted to a study of the summation of Fourier series and allied series by Hausdorff means [2]). With Hausdorff we define the generalized limit of the sequence $\{s_k\}$ to be

$$[H, q(u)] - \lim s_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_k \int_0^1 u^k (1-u)^{n-k}\, dq(u) \tag{1}$$

---

1) We can secure this by adding an appropriate $A + B \cos t$ to $\Phi(t)$.

2) F. Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen. I. Math. Zeitschrift, 9 (1921), 74—109

where $q(u)$ is of bounded variation in $(0, 1)$, continuous at $u = 0$, $q(0) = 0$, $q(1) = 1$. Let $f(x)$ be an arbitrary periodic function of class L, let $s_k(x)$ denote the kth partial sum of its formal Fourier series, and let $H_n[f(x); q(u)]$ denote the result of substituting $s_k(x)$ for s_k in the sum on the right-hand side of (1). The method of summability defined by $q(u)$, $[H, q(u)]$ say, is said to be (F) — effective if

(2) $$H_n[f(x);\ q(u)] \rightarrow f(x) \text{ uniformly}$$

for an arbitrary continuous function $f(x)$. It is said to be (L)-effective if (2) holds for an arbitrary function of class L almost everywhere.

We put

(3) $$C(s) = \int_0^1 [q(u) - u] \cos us\, du,$$

(4) $$\mathcal{J}(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{q_0(u)}{u}\, du + \int_0^{1-\varepsilon} \frac{q_0(1) - q_0(u)}{1-u}\, du, \quad q_0(u) = \int_0^u |dq(v)|.$$

In order that $[H, q(u)]$ be (F)-effective it is necessary that

(5) $$\int_0^\infty |C(s)|\, ds < \infty$$

whereas (5) together with

(6) $$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}(\varepsilon) < \infty$$

are sufficient. If there exists also a positive, continuous, non-increasing function $\mathfrak{C}(s)$ such that

(7) $$|C(s)| \leq \mathfrak{C}(s) \quad \text{and} \quad \int_1^\infty \mathfrak{C}(s)\, ds < \infty,$$

then $[H, q(u)]$ is (L)-effective, and, in addition, can be used to sum the derived series of a function of bounded variation. The definition will sum the conjugate series of a Fourier series and the conjugate derived series of a function of bounded variation if (6) holds, and if the Fourier sine transform of $q(u) - u$ satisfies (7).

The authors have determined a number of conditions, necessary and sufficient or merely sufficient, which ensure that the Fourier transform of a given function be integrable over an infinite range, and have applied these criteria to the construction of (F)- or (L)-effective definitions $[H, q(u)]$.

ON SUMMABILITY OF FOURIER SERIES

By EINAR HILLE, Princeton and J. D. TAMARKIN, Providence, U. S. A.

We are concerned here with a definition of summability by convergence factors, determined by a matrix $\mathfrak{A} \equiv (a_{mn})$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ which, in addition to the usual conditions of regularity (I) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn} - a_{mn+1}| \leqq A < \infty$, (II) $a_{mn} \to 1$ as $m \to \infty$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, satisfies also the condition (III) Each row of the matrix $\mathfrak{A}$ is a factor-sequence which transforms an arbitrary Fourier series of class L into a Fourier series of class L.

Let $f(x)$ be an arbitrary periodic function of class L (of period 2π), and let

$$(1) \qquad f(x) \sim f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n e^{inx} + f_{-n} e^{-inx}), \; f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

be the formal Fourier series of $f(x)$. Let

$$(2) \qquad \tau_m(x; f) \sim a_{m0} f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} (f_n e^{inx} + f_{-n} e^{-inx})$$

be the *m-th* transform of (1) by means of the matrix $\mathfrak{A}$. We say that the definition of summability defined by $\mathfrak{A}$, or simpler, the matrix $\mathfrak{A}$ is (F) — effective if

$$(3) \qquad \tau_m(x; f) \to f(x) \text{ uniformly}$$

for an arbitrary continuous function $f(x)$. If, on the other hand,

$$(4) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \tau_m(x; f)|^p\, dx \to 0,$$

then we say that the matrix $\mathfrak{A}$ is effective (in the mean) of order p. In particular, if $p = 1$, we say that $\mathfrak{A}$ is effective in the mean.

Our main result is that (subject to conditions I—III above) the class of (F)-effective matrices coincides with that of matrices effective in the mean. It is probable, although the proof is not yet completed, that the classes of matrices effective of order p, and of order p' $(1/p + 1/p' = 1)$ are also identical, and include all the

classes of matrices effective of order q, whenever q is between p and p' [1]). Our discussion is based upon the representation of

$$(5) \qquad \tau_m(x;f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, d\alpha_m(t)\, dt$$

which is readily available from the known facts of the theory of factor-sequences.

ON THE OSCILLATION OF THE MEANS OF RIESZ AND CESÀRO OF THE FIRST ORDER

By C. E. WINN, London

When t_n is the Riesz typical mean of the first order, derived from $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu$ namely

$$u_0\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_{n+1}}\right) + u_1\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right) + \ldots + u_n\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right),$$

where $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \lambda_n \longrightarrow \infty$; and we have given

$$-K \leqq \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} u_n \leqq H \, (0 < H,\ K < \infty), \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1,$$

then the following relation holds between $\overline{\lim}_{n\to\infty} s_n = b$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} s_n = a$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} t_n = \beta$ and $\underline{\lim}_{n\to\infty} t_n = \alpha$:

Both b and a lie in the closed interval whose end-points are the two roots of the equation

$$H\left(e^{\frac{\alpha - t}{H}} - 1\right) + K\left(e^{\frac{t-\beta}{K}} - 1\right) = 0.$$

Moreover it is possible for b and a to be simultaneously equal to the roots of this equation.

It should be noted that this result involves Hardy's theorem in special, when $\beta = \alpha$.

The case of Cesàro's mean occurs when $\lambda_n = n$.

---

[1]) This proof was completed at the time of the presentation of the paper at the Congress.

EINE INTEGRATIONSTHEORIE FÜR FUNKTIONEN UNENDLICH VIELER VERÄNDERLICHEN, MIT ANWENDUNG AUF DAS WERTEVERTEILUNGSPROBLEM FÜR FASTPERIODISCHE FUNKTIONEN, INSBESONDERE FÜR DIE RIEMANNSCHE ZETAFUNKTION

Von BÖRGE JESSEN, Kopenhagen

Der Vortrag berichtet über eine Anwendung der früher (Kongreß Oslo 1929, Habilitationsschrift Kopenhagen 1930) vom Vortragenden entwickelten (auf Daniell zurückgehenden und auch von Steinhaus wiedergefundenen) Integrationstheorie für Funktionen unendlich vieler Veränderlichen. Es handelt sich von demjenigen geschlossenen, unendlichdimensionalen Raum Q_ω, welcher aus dem vollen, unendlichdimensionalen Raum R_ω (d. h. dem Raum aller reellen Zahlenfolgen $x_1, x_2, x_3, \dots$) durch Reduktion der Koordinaten mod. 1 entsteht. Im Laufe des Vortrags wird von den wesentlichen Zügen dieser Theorie berichtet.

Die Anwendung besteht in einer Vervollständigung einer früher von H. Bohr entwickelten Methode, und bezieht sich zunächst auf solche analytische fastperiodische Funktionen $f(s) = \sum_1^\infty A_n e^{\Lambda_n s}$ $(s = \sigma + it)$, welche durch eine in einem vertikalen Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ absolut konvergente Reihe $\sum_1^\infty A_n e^{\Lambda_n s}$ mit komplexen Koeffizienten A_n und reellen linear unabhängigen Exponenten Λ_n dargestellt wird. Um einen Satz von Weyl über Gleichverteilung von Zahlen mod. 1 auszunützen hat H. Bohr gleichzeitig mit $f(s)$ die unendlichparametrige Menge aller Funktionen $f(s; x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_1^\infty e^{i2\pi x_n} A_n e^{\Lambda_n s}$ mit „gedrehten" Koeffizienten betrachtet. Die Funktionen dieser Menge sind eineindeutig auf die Punkte unseres unendlichdimensionalen Raumes $Q_\omega = R_\omega$ (mod. 1) bezogen. Nun gilt der Satz, daß wenn $\alpha < \gamma < \delta < \beta$, und wenn mit $N_a(T)$ die Anzahl der a-Stellen (a beliebig komplex) von $f(s)$ im Rechteck $\gamma < \sigma < \delta$, $|t| < T$ bezeichnet wird, so existiert der Grenzwert $G_a = \lim_{T \to \infty} \frac{N_a(T)}{2T}$ und ist gleich dem über den Parameterraum Q_ω erstreckten Integral $\int_{Q_\omega} n_a(x_1, x_2, x_3, \dots)\, dw_\omega$, wo $n_a(x_1, x_2, x_3, \dots)$ die Anzahl der a-Stellen von $f(s; x_1, x_2, x_3, \dots)$ im festen Rechteck $\gamma < \sigma < \delta$, $|t| < \frac{1}{2}$ bezeichnet. Dieser

Satz gibt die Grundlage für eine detaillierte Untersuchung von G_a, d. h. der Werteverteilung von $f(s)$.

Aehnliche Resultate werden für die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ mitgeteilt, und zwar nicht nur für die Halbebene $\sigma > 1$, wo $\zeta(s)$ fastperiodisch ist, sondern für die größere Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$; Ergebnisse einer gemeinsamen Untersuchung von H. Bohr und dem Vortragenden (Acta math. 54 und 58) werden durch Heranziehung der unendlichdimensionalen Integrationstheorie vervollständigt.

QUELQUES REMARQUES SUR LES POLYNÔMES GÉNÉRALISÉS DE LAGUERRE

Par KAREL DUSL, Prague

J'introduis les polynômes généralisés de Laguerre par la fonction génératrice:

$$\text{(I)} \qquad \frac{e^{\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} L_{n,k}(x)\frac{t^n}{n!}$$

Le développement dans le second membre est convergent pour toutes les valeurs de x et pour $|t| < 1$.

$L_{n,k}(x)$ signifie le polynôme de Laguerre d'ordre k, et de degré n.

Les polynômes ci-dessus se laissent exprimer à l'aide de la fonction de Kummer $G(\alpha, \gamma, x)$ comme il suit:

$$\text{(1)} \qquad L_{n,k}(x) = \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!} G(-n, k, x)$$

tandis que les polynômes analogues d'Hermite se rapportent à la même fonction G sous la forme:

$$\text{(2)} \qquad H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{2n!}{n!} G\left(-n, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{2}\right).$$

$$\text{(3)} \qquad H_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(2n+1)!}{n!} x\, G\left(-n, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{2}\right).$$

Tous les deux espèces de polynômes se déduisent alors de la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ par confluence de deux singularités régulières de l'équation hypergéométrique.

I. En premier lieu j'établis par une méthode différente de celle de Laguerre le développement de la fonction:

$$\text{(II)} \qquad x^k e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}}\, dx$$

en fraction continue. Le dénominateur de la n-ième réduite $\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$ est le polynôme généralisé de Laguerre $L_{n,k+1}(x)$.

L'équation differentielle:

$$\text{(III)} \qquad x\, L''_{n,k}(x) + (k+x)\, L'_{n,k}(x) - n\, L_{n,k}(x) = 0$$

et la relation de récurrence:

$$\text{(IV)} \qquad L_{n+1,k}(x) = (2n+k+x)\, L_{n,k}(x) - n(n+k-1)\, L_{n-1,k}(x)$$

liant trois polynômes consécutifs sont caractéristiques pour les polynômes de Laguerre. L'ensemble de ces deux relations constitue la base pour la considération suivante. Considérons l'expression:

$$\text{(4)} \qquad S = 1 - \frac{k}{x} + \frac{k(k+1)}{x^2} - \frac{k(k+1)(k+2)}{x^3} + \dots + \frac{k(k+1)\dots(k+2n-1)}{x^{2n}}.$$

Soit $\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$ la n-ième réduite du polynôme S. Les fonctions $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ satisfont à l'équation différentielle:

$$\text{(5)} \qquad x(\varphi'_n \psi_n - \varphi_n \psi'_n) - (k+x)\,\varphi_n \psi_n + x\,\varphi_n^2 + r = 0$$

où

$$\text{(6)} \qquad r = \frac{n!\,(k+n)!}{(k-1)!}$$

et dont l'intégrale est donnée par:

$$\text{(7)} \qquad \frac{e^{-x}\varphi(x)}{x^k \psi(x)} = \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^k}\, dx + r \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}\psi^2}\, dx.$$

On voit par la forme de l'équation différentielle (5) que:

1° l'équation $\psi_n(x) = 0$ a toutes ses racines distinctes, tout diviseur commun de $\psi_n(x)$ et $\psi'_n(x)$ devrait être diviseur de r;

2° par le même raisonnement on voit que les polynômes $\psi_n(x)$ et $\varphi_n(x)$ n'ont de diviseur commun.

Quand on fait la dérivée de l'équation (5) en se rapportant aux propriétés (1) et (2) des polynômes $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ on retrouve deux équations:

$$x\psi''_n(x) + (1 + k + x)\psi'_n(x) = a\psi_n(x) \tag{8}$$

et son adjointe:

$$x\varphi''_n(x) + (1 - k - x)\varphi'_n(x) - \varphi_n(x) + \psi_n(x) + 2x\psi'_n(x) = a\varphi_n(x) \tag{9}$$

et $a = n$, le coefficient de x^n en $\psi_n(x)$ étant égal à l'unité.

Le simple rapprochement des deux équations (8) et (3) donne le résultat:

$$\psi_n(x) = L_{n,k+1}(x) \tag{III}$$

Puisque la limite du reste

$$R_n = \frac{n!(k+n)!}{(k-1)!}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}\psi_n^2(x)}dx \tag{10}$$

dans le second membre de l'équation (7) devient égale à zéro pour $n \to \infty$ on voit que $\dfrac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$ est en effet la n-ième réduite du développement:

$$x^k e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^k} dx$$

en fraction continue.

La relation de récurrence (IV) vérifiée par les deux fonctions $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ donnent immédiatement le développement:

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^k} dx = \frac{e^{-x}}{x^k}\left[1 - \frac{k}{x+k+1} - \frac{k+1}{x+k+3} - \frac{2(k+2)}{x+k+5} - \dots\right] \tag{IV}$$

et par l'intégration par parties nous obtenons par conséquent:

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}} dx = \frac{e^{-x}}{x^k}\left[\frac{1}{x+k+1} - \frac{k+1}{x+k+3} - \frac{2(k+2)}{x+k+5} - \frac{3(k+3)}{x+k+7} - \dots\right] \tag{V}$$

d'accord avec le résultat antérieur donné pour $k=1$ par Laguerre. Ce résultat constitue une analogie à celui pour des polynômes d'Hermite.
II. En second lieu j'ai établi la formule d'addition pour les polynômes de Lagùerre par la simple multiplication des fonctions génératrices (I)

$$(11) \qquad L_{\mu,2k}(x+y) = \sum_{m,n}^{0\ldots\infty} \frac{\mu!}{m!\,n!} L_{m,k}(x) L_{n,k}(y), \quad m+n=\mu$$

ou symboliquement

$$(VI) \qquad L_{\mu,2k}(x+y) = [L_k(x) + L_k(y)]^{\mu}$$

$$L_{\mu,pk}(x_1 + x_2 + \ldots + x_p) = [L_k(x_1) + L_k(x_2) + \ldots + L_k(x_p)]^{\mu}$$

en convenant de remplacer dans le développement du second membre une puissance telle que $[L_k(x_i)]^r$ par $L_{r,k}(x_i)$. Cette formule, d'une forme très condensée, avait été donné par N. Nielsen et J. Kampé de Fériet pour les polynômes d'Hermite.

SUR LA CROISSANCE DES SUITES DE POLYNÔMES CONVERGENTES SUR LA FRONTIÈRE D'UN DOMAINE

Par F. LEJA, Varsovie

Considérons une suite de polynômes d'une variable complexe z

$$(1) \qquad P_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} \cdot z + \ldots + a_n^{(n)} \cdot z^n; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

le terme n-ième de cette suite étant du degré n au plus, et soit D un domaine quelconque du plan.

Nous dirons que *le facteur de convergence de la suite* (1) *dans le domaine* D est égal au nombre nonnégatif $\lambda = \lambda_D$ si 1⁰ la suite

$$(2) \qquad P_n(z) \cdot l^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

converge *uniformément* dans le domaine D lorsque le nombre l est quelconque mais satisfait à l'inégalité $|l| < \lambda$ et si 2⁰ cette suite ne converge pas uniformément dans D lorsque $|l| > \lambda$.

A chaque suite (1) et à chaque domaine D correspond un facteur de convergence bien déterminé qui peut être positif, nul ou infini. On sait que, si la suite (1) converge *uniformément* sur la frontière d'un domaine D, le facteur de convergence λ_D de cette suite est au moins égal à l'unité [1]).

Or, on peut démontrer la proposition beaucoup plus générale que voici :

Si la suite (1) converge (ou si elle est bornée) presque partout sur la frontière (supposée rectifiable) d'un domaine borné quelconque D, le facteur de convergence de cette suite dans le domaine D est au moins égal à l'unité.

Ce théorème a déjà été démontré dans le cas particulier où le domaine D se réduit à un cercle [2]). Dans le cas général, la démonstration exige une méthode différente, mais elle peut être basée, comme, dans le cas du cercle, sur la formule d'interpolation de Lagrange

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} P_n(z_j) \cdot \frac{\Delta_j(z)}{\Delta_j(z_j)},$$

où l'on a posé $\Delta_j(z) = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{j-1})(z - z_{j+1}) \dots (z - z_n)$.

Observons que notre théorème cesse d'être vrai si l'on remplace la suite de polynômes (1) par une suite des fonctions analytiques quelconques

(3) $$f_0(z),\ f_1(z),\ \dots,\ f_n(z),\ \dots,$$

holomorphes dans le domaine fermé D. Une telle suite (3) peut être convergente partout à l'intérieur et sur la frontière du domaine D et son facteur de convergence λ_D (qui se définit d'une manière analogue comme dans le cas de polynômes) peut être égal à zéro.

Néanmoins, si la suite (3) converge (ou si elle est bornée) en chaque point d'un domaine D, son facteur de convergence λ_D ne peut pas être quelconque : *Il doit être ou bien égal à zéro ou bien au moins égal à l'unité.*

Cette proposition, qui équivaut au fond à un théorème démontré par M. F. Hartogs [3]), peut facilement être déduite du théorème énoncé plus haut pour les suites de polynômes.

Observons encore que, si la suite de polynômes (1) converge sur la frontière d'un domaine D partout, à l'exception d'un arc de longueur aussi petite qu'on veut mais positive, le facteur de convergence λ_D de cette suite peut être plus petit que l'unité.

---

[1]) De la même propriété jouissent les suites des fonctions analytiques quelconques régulières dans D (le facteur de convergence de telles suites étant défini d'une manière tout à fait analogue).

[2]) *F. Leja:* Math. Ann. t. 107, 1932, p. 68—82.

[3]) *F. Hartogs:* Math. Ann. t. 62, 1906, p. 9.

ÜBER DIE DIRICHLET'SCHE REIHE FÜR $(\zeta(s))^\rho$

Von A. KIENAST, Küsnacht (Zürich)

Zwischen den Reihen für $\zeta(s)$, $\zeta^2(s)$, .. und $(1-x)^{-1}$, $(1-x)^{-2}$, .. besteht in formaler Hinsicht Analogie. Die in diesem Sinne zur binomischen Reihe analoge Dirichlet'sche Reihe ergibt sich folgendermaßen. Setzt man

1) $(\zeta(s))^\rho = \sum \alpha_{\rho,n}\, n^{-s}$ so gilt $\alpha_{\rho,1} = 1\,;\ \sum\limits_{k\cdot\lambda=n} \alpha_{\rho,k}\,\alpha_{\sigma\lambda} = \alpha_{\rho+\sigma,n}$

2) Aus $\rho\zeta^{\rho-1}\zeta' = (\zeta^\rho)'$ folgt $\sum\limits_{k\cdot\lambda=n} \alpha_{\rho,k}\,\Lambda(\lambda) = \rho^{-1}\,\alpha_{\rho n}\ \lg n$.

Hieraus erhält man für $n = p_1^{a_1}\, p_2^{a_2} \,..\, p_\nu^{a_\nu}$, wo p_λ eine Primzahl und a_1 eine ganze positive Zahl ist

3) $$\alpha_{\rho,n} = \binom{\rho+a_1-1}{a_1}\binom{\rho+a_2-1}{a_2}\cdots\binom{\rho+a_\nu-1}{a_\nu}.$$

Der Beweis ergibt sich aus 2) durch Induktion. Man nimmt an, 3) sei bewiesen für $n_1 = n\,p_\nu^{-1}$. Dann zeigt man mittels 2), daß daraus 3) für n sich ergibt. Hierzu zerlegt man die Summe 2) in zwei Teile; der erste umfassend diejenigen k, die Teiler von n_1 sind, der zweite die übrigen. Endlich berechnet man aus 2), daß $\alpha_{\rho p} = \rho$.

Aus 3) folgt die bekannte Reihe

$$\lg \zeta(s) = \lim_{\rho=0} \rho^{-1}\left\{(\zeta(s))^\rho - 1\right\} = \sum \frac{\Lambda(n)}{\lg n}\, n^{-s}$$

Für $0 < \rho$ ist $\alpha_{\rho,k} > 0$ und da

$$(s-1)^\rho \sum \alpha_{\rho,n}\, n^{-s} \to 1 \quad \text{für } s \to 1$$

so ergibt der Satz von Hardy und Littlewood

4) $$\sum_1^x \frac{\alpha_{\rho,k}}{k} \sim (\Gamma(\rho+1))^{-1}\,(\lg x)^\rho,\ (0 < \rho).$$

Aus 2), 4) und $\sum\limits_1^x \Lambda(\lambda) = O(x)$ folgt $\sum\limits_1^x \alpha_{\rho k} \lg k = O\left(x\,(\lg x)^\rho\right)$, $(0<\rho)$

woraus durch partielle Summation

5) $$\psi_\rho(x) = \sum_1^x{}' \alpha_{\rho k} = O\left(x(\lg x)^{\rho-1}\right), \quad (o < \rho)$$

Weiter ist für $o < \rho$

$$\psi_{\rho+1}(x) = \sum_1^x \alpha_{\rho k}\left[\frac{x}{k}\right] = x\sum_1^x \frac{\alpha_{\rho k}}{k} - \sum_1^x \alpha_{\rho k}\left(\frac{x}{k} - \left[\frac{x}{k}\right]\right) =$$
$$= \left(\Gamma(\rho+1)\right)^{-1} x(\lg x)^\rho + o\left(x(\lg x)^\rho\right)$$

somit, genauer als 5)

6) $$\rho^{-1}\psi_\rho(x) \sim \left(\Gamma(\rho+1)\right)^{-1} x(\lg x)^{\rho-1}, \quad (1 \leqq \rho).$$

Multipliziert man

$$u = \zeta' + \zeta^2 - 2C\zeta = \sum e_n n^{-s}, \quad \sum_1^x e_\lambda = O(x^{1/2})$$

mit $\zeta^{\rho-1}$ und geht zu den summatorischen Funktionen über, so bekommt man

$$-\rho^{-1}\sum_1^x \alpha_{\rho,k}\lg k + \psi_{\rho+1}(x) - 2C\psi_\rho(x) = \sum_{k\cdot\lambda\leqq x} \alpha_{\rho-1,k}\, e_\lambda.$$

Für $o < \rho < 1$ gibt 5) $\psi_\rho(x) = o(x)$; da dann $|\alpha_{\rho-1,k}| < 1$, so ist die rechte Seite gleich $O\left(\sum_1^x \sqrt{\frac{x}{k}}\right) = O(x)$. Somit

7) $$\rho^{-1}\sum_1^x \alpha_{\rho k}\lg k = \psi_{\rho+1}(x) + O(x) \sim \left(\Gamma(\rho+1)\right)^{-1} x(\lg x)^\rho, \quad o < \rho < 1.$$

Partielle Summation unter Verwendung von 7) ergibt jetzt, daß 6) auch für $o < \rho < 1$ richtig ist.

Da in 7) das Fehlerglied $O(x)$ auftritt, so ist 6) nicht bewiesen für $\rho = o$, obgleich beide Seiten endlich bleiben.

CONVERGENCE ET SOMMABILITÉ DE DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DES POLYNÔMES D'HERMITE ET DE LAGUERRE

Par E. KOGBETLIANTZ, Paris

La convergence et la sommabilité en un point fixe $x = x_0$ de développements formels

$$\text{(H)} \qquad \sqrt{\pi}\,.\, f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}.\ [\Gamma(n+1)]^{-1}.\, H_n(x).\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}.\ H_n(u) f(u).du$$

$$\text{(L)} \qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} n!\,[\Gamma(n+\alpha+1)]^{-1}.\ L_n^{(\alpha)}(x).\int_0^{\infty} e^{-u}.\ u^{\alpha}\, L_n^{(\alpha)}(u)\,.\ f(u)\, du$$

dépendent de l'allure de $f(x)$ à l'infini (H et L) et au point $x = 0$ (L seulement, si $x_0 > 0$). Les expressions des fonctions génératrices de leurs séries-noyaux dont la deuxième, à savoir

$$\sum_0^{\infty} n!\,[\Gamma(n+\alpha+1)]^{-1}.\ L_n^{(\alpha)}(x)\, L_n^{(\alpha)}(u).\ z^n = \frac{e^{-\frac{(x+u)z}{1-z}}}{1-z}\cdot\frac{\mathcal{J}_\alpha\left(\frac{2i\sqrt{uxz}}{1-z}\right)}{(i\sqrt{uxz})^{\alpha}}$$

n'a été déterminée qu'en 1932 par l'auteur et presque simultanément par M. Hardy, ainsi que l'inégalité

$$L_n^{(\alpha)}(x) = O\left(e^{\frac{x}{2}}\cdot x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right),$$

dont le champ de validité uniforme a été étendu par l'auteur à l'intervalle infini $(0, \infty)$, permettent d'établir les conditions suffisantes meilleures possibles de convergence et de sommabilité des séries H et L concernant l'allure de $f(x)$ à l'infini et (pour L) au point $x = 0$.

Quant à l'allure de $f(x)$ autour x_0, où l'on somme son développement H ou L, on suppose qu'elle assure la convergence ou la sommabilité étudiée. On a ainsi les résultats suivants, basés sur la sommabilité avec une somme nulle pour $x \neq u$ des séries-noyaux divergentes:

$$\sum_0^{\infty} 2^{-n}\,[\Gamma(n+1)]^{-1}.\, H_n(x)\, H_n(u) \ \text{ et } \ \sum_0^{\infty} n!\,[\Gamma(n+\alpha+1)]^{-1}.\, L_n^{(\alpha)}(x)\,.\ L_n^{(\alpha)}(u):$$

I. L'intégrabilité de $e^{-\frac{u^2}{2}}.\,u^{-1}\,|f(u)|$ à l'infini assure la convergence de H.

Celle de L a lieu, si $u^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}.|f(u)|$ est intégrable dans (o, ε) et $e^{-\frac{u}{2}}u^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}.|f(u)$ dans (a, ∞), tandis que pour $x_0 = 0$ on doit supposer l'intégrabilité dans (a, ∞), de $e^{-\frac{u}{2}}.u^{\alpha-\frac{1}{2}}.|f(u)|$.

II. La sommabilité (C, δ) de H est assurée, si $e^{-\frac{u^2}{2}}.u^{-(2\delta+1)}.|f(u)|$ est intétgrable à l'infini. Celle de L pour $x_0 > 0$ a lieu, si $u^{\frac{\alpha+\delta}{2}-\frac{1}{4}}.|f(u)|$ est intégrable dans (o, ε) et $e^{-\frac{u}{2}}.u^{\frac{\alpha}{2}-\delta-\frac{3}{4}}.|f(u)|$ l'est dans (a, ∞), tandis que pour $x_0 = 0$, on doit supposer l'intégrabilité à l'infini de $e^{-\frac{u}{2}}.u^{\alpha-\delta-\frac{1}{2}}|f(u)|$. La (C, δ) élargit beaucoup les conditions suffisantes imposées à l'allure de $f(x)$ autour du point x_0: il suffit de supposer $f(x)$ intégrable dans tout l'intervalle fini et l'existence de $f(x_o \pm o)$, mais la sommabilité (E, k) par le procédé d'Euler est inopérante à ce point de vue, étant au contraire très effective en ce qui concerne l'allure de $f(x)$ à l'infini. Ainsi:

III. La série L est sommable (E, k) pour $2^{k+1}(1-q) > 1$, si $f(x) = O(x^{\beta}.e^{qx})$ pour $x \to \infty$ quels que soient β finie et $q < 1$. La série H dans cette hypothèse est sommable (E, k) pour $2^k.(3-4q) > 1$, donc seulement si $4q < 3$. Le procédé mixte $(C, \delta).(E, k)$, permet d'obtenir à la fois les conditions suffisantes les plus larges et à l'infini et au voisinage immédiat du point $x = x_0$.

SUR LES MÉTHODES DE M. NORBERT WIENER ET LA FONCTION $\zeta(s)$

Par PAUL LÉVY, Paris

Du théorème II du mémoire publié récemment par M. Norbert Wiener sous le titre "Tauberian Theorems", on déduit aisément le théorème suivant :

Théorème. — Etant donné un nombre σ réel, positif et différent de un, pour que $\zeta(s)$ n'ait aucune racine de partie réelle $R(s) = \sigma$, il faut et il suffit qu'à tout ε

positif on puisse faire correspondre un entier N et des coefficients b_n et c_n $(c_n > 0)$ tels que

$$\int_0^\infty X^{\sigma-1}\left|e^{-X}-\sum_1^N \frac{b_n}{e^{c_n X}+1}\right| dX < \varepsilon. \tag{1}$$

De (1), on déduit d'ailleurs, pour $R(s) = \sigma$, et en posant $c_n = e^{\lambda_n}$, $b_n = a_n c_n^\sigma$,

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)} - (1-2^{1-s})\sum_1^N b_n e^{-\lambda_n s}\right| < \frac{\varepsilon}{|\Gamma(s)\zeta(s)|}, \tag{2}$$

de sorte que sur toute droite $R(s) = \sigma$ ne comprenant aucune racine de $\zeta(s)$, $(\sigma > 0$ et $\neq 1)$, $\frac{1}{\zeta(s)}$ est représentable par une série d'un type généralisant les séries de Dirichlet comme les séries de polynomes généralisent les séries de puissances. Indépendamment de l'hypothèse de Riemann et des conséquences connues qui en résultent pour la série $\Sigma\frac{\mu(n)}{n^s}$, on peut donc affirmer qu'en exceptant au plus une infinité dénombrable de valeurs de σ, à tout σ positif correspond un développement du type considéré ; sa convergence est uniforme sur toute portion finie de la droite $R(s) = \sigma$. Pour chacun de ces développements, le domaine pour lequel sa convergence peut se déduire de l'inégalité (1) est un certain intervalle (σ_1, σ_2), et la découverte d'une méthode de prolongement permettant dans tous les cas d'étendre cet intervalle jusqu'à une des limites de l'intervalle $(0 - 1)$ (l'une ou l'autre suivant les cas) entraînerait la démonstration de l'hypothèse de Riemann.

SUR LE PRODUIT $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_\varphi(s)$ OÙ $\zeta_\varphi(s) = \sum\frac{\varphi(n)}{n^s}$, $\varphi(z)$ ÉTANT UNE FONCTION ENTIÈRE

Par S. MANDELBROJT, Clermont-Ferrand

Soit $\varphi(z)$ une fonction entière paire telle que:

$$|\varphi(z)| < e^{2\vartheta\pi|z|}, \quad 0 < \vartheta < 1$$

et supposons que $\Sigma \frac{\varphi(n)}{n^s}$ possède un axe de convergence absolue.

L'auteur démontre que, pour $\sigma > \sigma_A =$ axe de convergence absolue de $\Sigma \frac{\varphi(n)}{n^s} = \zeta_\varphi(s)$ $(s = \sigma + it)$, on peut écrire:

(1) $$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_\varphi(s) = F(s) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty \theta(t)\, e^{\frac{-(s-1)}{2} t}\, dt$$

où

$$\theta(t) = \sum_1^\infty \alpha_n \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n}} \left\{ \left(\frac{d^{2n} e^{-\pi^2 \nu^2 e^t}}{d\nu^{2n}} \right)_{\nu=0} + 2 \left(\frac{d^{2n} e^{-\pi^2 \nu^2 e^t}}{d\nu^{2n}} \right)_{\nu=1} \right\},$$

les α_n étant les coefficients de $\varphi(z)$: $\varphi(z) = \sum_1^\infty \alpha_n z^{2n}$, et où $F(s)$ est une fonction entière.

On part de la formule:

$$\int_{-\infty}^\infty u^n e^{-\pi u^2 + 2\pi u \nu i} du = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{d^n e^{-\frac{\pi \nu^2}{y}}}{d\nu^n}.$$

Des calculs assez simples conduisent à la relation:

(2) $$2 \sum_1^\infty \varphi(m)\, e^{-\pi y m^2} = \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{\nu=-1}^{1} \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n}} \frac{d^{2n} e^{-\frac{\pi \nu^2}{y}}}{d\nu^{2n}} + P(y)$$

où

(3) $$|P(y)| < \frac{C_1}{\sqrt{y}} \sum_2^\infty e^{-\frac{\pi}{y}(\nu-1)^2}$$

Dans l'évaluation de $T_2(s)$ de la formule

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_\varphi(s) = \sum_{q=1}^\infty \int_0^\infty \varphi(q)\, e^{-q^2 e^z} e^{\frac{sz}{2}} dz$$

$$+ \sum_{q=1}^\infty \int_{-\infty}^0 \varphi(q)\, e^{-q^2 e^z} e^{\frac{sz}{2}} dz = T_1(s) + T_2(s)$$

on tiendra compte des formules (2) et (3). On verra que $T_2(s)$ est égale à une fonction entière à laquelle on ajoute l'intégrale de (1) $(\sigma > \sigma_A)$.

Quant à $T_1(s)$ on constate aisément qu'elle est une fonction entière.

UN THÉORÈME GÉNÉRAL D'INVERSION DES PROCÉDÉS DE SOMMABILITÉ

Par J. KARAMATA, Beograd

Les théorèmes d'inversion, c'est-à-dire les théorèmes de nature tauberienne, furent établis, pour bien des procédés particuliers de sommabilité, dans les importants travaux de MM. Hardy, Littlewood, Landau, Schmidt, Wiener et d'autres. Tels sont par exemple les théorèmes suivants :

De $$e^{-r}\sum_{v=0}^{\infty} s_v \frac{1}{v!} r^v \to s, \quad r \to \infty, \qquad \text{(som. — B)}$$

resp. $$\sum_{v=0}^{\infty} u_v r^v \to s, \quad r \to 1, \qquad \text{(som. — A)}$$

resp. $$\sum_{v=0}^{\infty} u_v v^{-\sigma} \to s, \quad \sigma \to 0, \qquad \text{(som. — D)}$$

il resulte $$s_n = \sum_{v=0}^{n} u_v \to s, \quad n \to \infty,$$

toutes les fois que la suite u_v satisfait à la condition

$$\lim_{n=\infty} \inf \sum_{n=\infty}^{n'} u_v = -w(\varepsilon) \to 0 \quad \textit{avec } \varepsilon, \tag{I}$$

pour tout n' tel que $n \leqq n' \leqq N(\varepsilon)$, la longueur de l'intervalle $\{n, N(\varepsilon)\}$ étant, suivant les procédés, donnée par :

$$\text{B}: \; N(\varepsilon) = n + \varepsilon\sqrt{n}, \qquad \text{A}: \; N(\varepsilon) = n + \varepsilon n, \qquad \text{D}: \; N(\varepsilon) = n^{1+\varepsilon}.$$

C'est donc l'intervalle $\{n, N(\varepsilon)\}$ qui importe ; étant complètement déterminé par le p. d. s., il mesure en quelque sorte (suivant sa longueur asymptotique) la portée (l'efficacité intérieure) des différents p. d. s. Je le nommerai *intervalle de convergence.*

Mon but est de montrer qu'on peut déterminer l'intervalle de convergence pour une classe relativement large de p. d. s. La forme de ces procédés, la meilleure indiquée en vue de cette étude est celle qu'a étudiée M. O. Perron (Math. Zeit. 6, p. 286), c'est-à-dire $\sum_{v=0}^{\infty} u_v \varphi_v(r)$, où

$$\varphi_0(r) = 1 \geqq \varphi_v(r) \geqq \varphi_{v+1}(r) \text{ et } \varphi_v(r) \to 1, \; r \to \infty, \; v = 1, 2, \ldots \tag{II}$$

Ces p. d. s. étant trop généraux, ont doit les restreindre en les assujettissant à satisfaire en outre aux conditions suivantes :

de $$\sum_{v=0}^{\infty} u_v \varphi_v(r) \to s, \quad r \to \infty, \tag{III}$$

il doit résulter $\sum_{v=0}^{\infty} u_v \{\varphi_v(r)\}^k \to s, \ r \to \infty$ *pour tout* $k = 2, 3, \ldots$ (IV)

Je dirai d'un p. d. s. qu'il est *régulier,* si outre les conditions (II) il satisfait aux conditions (IV) pour toute suite vérifiante (III).

Théorème. — L'intervalle de convergence des procédés réguliers de sommabilité est l'intervalle que peut parcourir l'indice v pour que l'inégalité

$$x^{1+\varepsilon} \leqq \varphi_v(r) \leqq x, \quad 0 < x < 1, \tag{V}$$

soit satisfaite.

C'est-à-dire en désignant par n le plus petit des v satisfaisant à (V), on obtient le plus grand $N(\varepsilon)$ comme fonction de n et ε, ces deux nombres définissant l'intervalle de convergence $\{n, N(\varepsilon)\}$ du procédé régulier à noyau $\varphi_v(r)$.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du suivant (que j'ai établi dans les Studia Mathematica T. *3*, p. 68 (1931):

Si $\alpha_r(x)$, $0 \leqq x \leqq 1$, *satisfait aux conditions suivantes:*

$$\alpha_r(1) = 0, \ r \geqq 0; \ \int_0^1 t^k d\{\alpha_r(t)\} \to \int_0^1 t^k d\{\alpha(t)\}, \ r \to \infty, \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

et $\lim_{r=\infty}$ *inf* $\min_{x^{1+\varepsilon} \leq t \leq x} \{\alpha_r(x) - \alpha_r(t)\} \geqq w(\varepsilon) \to 0$ *avec,* $0 < x < 1$, *alors* $\alpha_r(x) \to \alpha(x)$, $r \to \infty$, *en tout point de continuité* x *de* $\alpha(x)$.

On le vérifie facilement en prenant pour $\alpha_r(x)$ la fonction de sauts :

$$\alpha_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 1 \\ \sum_{v=0}^{n} u_v & \text{pour } \varphi_{n+1}(r) \leqq x < \varphi_n(r), \ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ce résultat nous permet d'établir des théorèmes d'inversion pour une classe assez générale de p. d. s. La difficulté essentielle est de voir si un procédé est *régulier.* Pour les procédés A et D mentionnés ce fait est évident, il est de même démontré pour le procédé typique de Riesz, mais déjà les procédés à noyau de la forme $\varphi(v/r)$ présentent de sérieuses difficultés comme il est à prévoir des travaux de M. N. Wiener.

Par contre, en ce qui concerne la mesure de l'efficacité des p. d. s., c'est toujours la longueur de l'intervalle $\{n, N(\varepsilon)\}$, définie par (V), qui peut servir de mesure, même dans le cas où le procédé n'est pas régulier (les conditions (IV) se rapportant plutôt aux problèmes d'unicité).

GEOMETRIE

RIBAUCOURTRANSFORMATION UND SPHÄRISCHE ABBILDUNG [1]

Von H. HAMBURGER, Köln

Es sei eine Fläche durch den Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,(u, v)$ bestimmt, der sich vom Anfangspunkt des Koordinatensystems zu einem Flächenpunkt erstreckt. Außerdem seien die Parameterlinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ der Fläche gleich ihren Krümmungslinien.

Um nun die allgemeinste Fläche $\hat{\mathfrak{x}}\,(u, v)$ zu bestimmen, welche aus $\mathfrak{x}\,(u, v)$ durch Ribaucourtransformation hervorgeht, setze man

$$(*) \qquad \hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - 2\left(c + \int_{u_0 v_0}^{u, v} \gamma\, d\varphi\right) \frac{\gamma}{\gamma^2},$$

hierbei bezeichnet c eine willkürliche Integrationskonstante, $\gamma\,(u, v)$ eine beliebige Fläche, welche mit $\mathfrak{x}\,(u, v)$ ein gemeinsames sphärisches Bild der Krümmungslinien hat. Für den Ausdruck (*) benutzen wir die symbolische Abkürzung

$$\hat{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{x}, \gamma\}_c.$$

In dieser Schreibweise formulieren wir einen wichtigen Permutabilitätssatz:

$$\mathfrak{x}\,(u, v), \quad \gamma_1\,(u, v) \quad \gamma_2\,(u, v)$$

seien drei Flächen mit gemeinsamem sphärischen Bild der Krümmungslinien. Dann ist

$$\left\{\{\mathfrak{x}, \gamma_1\}_{c_1}, \{\gamma_2, \gamma_1\}_{c_2}\right\}_{c_3} = \left\{\{\mathfrak{x}, \gamma_2\}_{c'_1}, \{\gamma_1, \gamma_2\}_{c'_2}\right\}_{c'_3}.$$

Hierbei sind c_1, c_2, c_3 willkürliche Konstante, während c_1', c_2', c_3' in bestimmter Weise von den c_1, c_2, c_3 abhängen.

Dieser Satz hängt eng zusammen mit einem Permutabilitätssatz von Bianchi [2].

Im zweiten Teile des Vortrages werden einige Anwendungen der Ribaucourtransformation besprochen. Für die bei dem Problem der sphärischen Abbildung auftretende Moutard'sche Gleichung

$$M(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + h z = 0$$

---

[1] Ein ausführlicher Bericht des Vortrages wird in den Rendiconti dell' Academia dei Lincei erscheinen.

[2] Vergl. Bianchi: Lezione di geometria differenziale, vol. II, Teil I. 3ª ed. (1923) p. 207—212.

wird eine neue geometrische Deutung gegeben. Außerdem wird eine bekannte Moutard'sche Formel, welche sich auf das allgemeine Integral eines aus $M(z) = 0$ abgeleiteten Differentialgleichung bezieht, mit der Ribaucourtransformation in Zusammenhang gebracht.

Ferner werden mit Bianchi [1]) die Orthogonalflächen cyklischer Systeme als ein Büschel von Flächen aufgefaßt, welche durch Ribaucourtransformationen aus einer von ihnen abgeleitet sind. Dies führt zu neuen Ausdrücken für die durch Inversionen von Lie und Laguerre transformierten Flächen, welche sich als Orthogonalflächen spezieller cyklischer Systeme ergeben.

UNA PROPRIETÀ CARATTERISTICA DELLE CONGRUENZE DI SFERE DI RIBAUCOUR ILLIMITATAMENTE DEFORMABILI

Di GIOVANNI RICCI, Pisa

La presente comunicazione riguarda lo studio delle proprietà delle congruenze di sfere, permanenti per qualunque flessione della superficie dei centri.

Per definire una *congruenza di sfere* (cioè una doppia infinità di sfere) si assegnano, come di consueto, le coordinate rettangolari x, y, z del centro M della sfera e il suo raggio R in funzione di due parametri u, v. Supponiamo che il centro M descriva una effettiva superficie S (superficie dei centri), non una curva, e denotiamo con X, Y, Z i coseni direttori della normale a S. Introduciamo le due forme fondamentali di questa superficie

$$S dx^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \qquad - S dx dX = D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2,$$

e denotiamo con $K, R_{11}, R_{12}, R_{22}, \Delta_1 R, \Delta_2 R, \Delta_{22} R$ rispettivamente la curvatura totale, le tre derivate seconde covarianti di R e i tre parametri differenziali di R, tutti calcolati in base alla forma $S dx^2$. Diciamo Σ e $\overline{\Sigma}$ le due falde dell'inviluppo della congruenza di sfere, che supponiamo distinte (per la qual cosa è necessario e sufficiente $R \neq 0$, $1 - \Delta_1 R \neq 0$) e ϱ_1, ϱ_2 i due raggi principali di curvatura di Σ e $\overline{\varrho}_1, \overline{\varrho}_2$ quelli di $\overline{\Sigma}$.

Vogliamo qui enunciare un teorema che dà una proprietà caratteristica delle congruenze di *Ribaucour* illimitatamente deformabili [2]), cioè di quelle congruenze di

[1]) Vergl. Bianchi, loc. cit. p. 228—230.

[2]) Ved. L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, 3 ed., Pisa 1923, Vol. II^0, p. 198.

sfere sulle cui falde dell' inviluppo Σ, $\bar{\Sigma}$ si corrispondono le linee di curvatura per qualunque flessione della superficie S dei centri.

Osserviamo anzitutto che valgono le due identità

$$\frac{1}{\rho_1+R}+\frac{1}{\rho_2+R}+\frac{1}{\bar{\rho}_1+R}+\frac{1}{\bar{\rho}_2+R}=\frac{2}{1-\Delta_1 R}\left(\Delta_2 R-\frac{R_v^2 R_{11}-2R_u R_v R_{12}+R_u^2 R_{22}}{EG-F^2}\right)$$

$$\frac{1}{(\rho_1+R)(\rho_2+R)}+\frac{1}{(\bar{\rho}_1+R)(\bar{\rho}_2+R)}=\frac{2\Delta_{22}R}{1-\Delta_1 R}+2K$$

le quali ci assicurano che le due quantità ai rispettivi primi membri risultano invarianti per flessione di S.

Teorema : Se per ogni flessione della superficie S dei centri di una congruenza di sfere coll' inviluppo a falde distinte, i raggi principali di curvatura ρ_1, ρ_2, $\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_2$ delle due falde Σ e $\bar{\Sigma}$ e i parametri u, v sono legati da una relazione fissa [1])

1) $$\Lambda(\rho_1, \rho_2, \bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2 ; u, v)=0.$$

di cui il primo membro non sia funzione esclusivamente dei quattro argomenti

(2) $$\frac{1}{\rho_1+R}+\frac{1}{\rho_2+R}+\frac{1}{\bar{\rho}_1+R}+\frac{1}{\bar{\rho}_2+R}, \quad \frac{1}{(\rho_1+R)(\rho_2+R)}+\frac{1}{(\bar{\rho}_1+R)(\bar{\rho}_2+R)}, u, v$$

allora necessariamente la congruenza è di *Ribaucour* illimitatamente deformabile, cioè esiste una funzione $\lambda(u, v)$ per cui

$$R_{11}=\lambda(E-R_u^2),\quad R_{12}=\lambda(F-R_u R_v),\quad R_{22}=\lambda(G-R_v^2)$$

e valgono le relazioni (non tutte indipendenti)

$$\frac{1}{\rho_1+R}+\frac{1}{\rho_2+R}+\frac{1}{\bar{\rho}_1+R}+\frac{1}{\bar{\rho}_2+R}=4\lambda,$$

$$\frac{1}{(\rho_1+R)(\rho_2+R)}+\frac{1}{(\bar{\rho}_1+R)(\bar{\rho}_2+R)}=2(K+\lambda^2),$$

$$\left(\frac{1}{\rho_1+R}-\frac{1}{\bar{\rho}_1+R}\right)\left(\frac{1}{\rho_2+R}-\frac{1}{\bar{\rho}_2+R}\right)=4K,$$

$$\frac{1}{\rho_1+R}-\frac{1}{\rho_2+R}=-\frac{1}{\bar{\rho}_1+R}+\frac{1}{\bar{\rho}_2+R},$$

$$(K-\lambda^2)\rho_1\rho_2+\{RK+\lambda(1-R\lambda)\}(\rho_1+\rho_2)+\{R^2K-(1-R\lambda)^2\}=0$$

$$(K-\lambda^2)\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2+\{RK+\lambda(1-R\lambda)\}(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2)+\{R^2K-(1-R\lambda)^2\}=0.$$

---

[1]) È ovvio che con questo escludiamo anche che il primo membro della (1) contenga un fattore funzione esclusivamente dei quattro argomenti (2).

Ogni relazione come la (1) risulta necessariamente una conseguenza delle precedenti.

Da questo teorema discendono come corollari alcune classiche proposizioni: Quando la (1) assume una delle tre forme seguenti

$$\rho_1 + \rho_2 = 0, \qquad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \text{costante}, \qquad \rho_1 \rho_2 = \text{costante}$$

si ottengono i teoremi di *Guichard-Bianchi* relativi alle deformate delle quadriche rotonde [1])

Quando la (1) assume la forma $\varrho_1 = \text{cost}$, Σ si conserva una superficie canale.

Quando la (1) assume la forma $\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = 0$, Σ si conserva sviluppabile (*Bianchi*) [2]).

Quando la (1) assume la forma $\Lambda(\varrho_1, \varrho_2) = 0$, risulta necessariamente

$$a \rho_1 \rho_2 + b(\rho_1 + \rho_2) + c = 0 \qquad (a,\ b,\ c \text{ costanti})$$

e si ricade necessariamente in uno dei cinque casi precedenti, quando si aggiunga una opportuna costante al raggio R della sfera (*Bianchi*) [3]).

NUOVI ORIZZONTI NELLA GEOMETRIA SOPRA GLI ENTI ALGEBRICI

Di FRANCESCO SEVERI, Roma

In due recentissime Memorie [a) La serie canonica e la teoria delle serie principali, ecc., Comm. Math. Helv. 1932, pag. 268; b) Un nuovo campo di ricerche, ecc., Memorie della R. Acc. d'Italia, 1932, X], ho gittato le basi per una teoria delle serie di gruppi di punti sopra una superficie e dei sistemi di varietà di dimensione qualunque in una data varietà, rispondendo ad una esigenza che da anni si imponeva. Vasto è l'orizzonte che si schiude: problemi importanti e legami nuovi s'intravvedono nel campo algebrico ed in quello trascendente. Dirò delle cose essenziali.

1) Ved. op. cit. Vol II°, pp. 155, 157, 161—165.
2) Ved. op. cit. Vol. II°, p. 150.
3) Ved. op. cit. 2a ed. Pisa al 1903, Vol. II° p. 111.

Occorre premetter la teoria delle *serie di equivalenza* g_n^r sulle curve riducibili [Memoria b)], la quale estende la teoria delle serie lineari sulle curve irriducibili. Una serie di gruppi di n punti d'una superficie F dicesi una *serie di monoequivalenza* quando due suoi gruppi son sempre congiunti da qualche g_n^1 (sopra una curva irriducibile o riducibile), formata da gruppi della serie. Una serie di monoequivalenza può essere *curvilinea* (giacere sopra una curva) o *superficiale* (invader la superficie). Una serie di gruppi di n punti di F dicesi una *serie di biequivalenza* quando due suoi gruppi qualunque stanno in qualche involuzione superficiale, razionale, $\sim^2$, di ordine n, formata da gruppi della serie. Le serie di mono e di biequivalenza si denotano col nome comune di *serie di equivalenza*. Queste serie sono sempre varietà irriducibili. Una serie di biequivalenza è anche sempre di monoequivalenza; essa è involutoria ed i suoi gruppi, passanti per punti dati, formano una serie di equivalenza. Tra le serie di biequivalenza hanno speciale importanza le serie *razionali* o *serie normali* J_n^r e le serie *unirazionali* o *serie principali* I_n^r. L'importanza delle serie principali è dimostrata p. e. dal fatto che ogni serie di biequivalenza *completa* è principale. I gruppi d'intersezione delle coppie di curve di due sistemi lineari formano una serie normale, che chiamasi *serie intersezione completa*. I gruppi di una I_n^r possono avere (oltre a punti fissi, trascurabili) gruppi di m ($< n$) punti, variabili sopra una curva C (spezzata o no). Questi ultimi gruppi formano su C una serie di equivalenza g_m^s. La serie γ ottenuta da I_n^r prescindendo dai punti di C, è una serie di biequivalenza; e, se la I_n^r è completa, anche g_m^s e γ son complete, cioè γ è una serie principale, che chiamasi *resto* di g_m^s rispetto ad I_n^r. Ogni serie principale completa è intersezione completa o parziale (cioè resto di una serie di equivalenza curvilinea rispetto ad un'intersezione completa).

Ogni serie unirazionale superficiale di ordine n è contenuta in una serie principale completa I_n^r. Due serie principali aventi un gruppo totale comune, appartengono ad una medesima serie principale dello stesso ordine. Chiamati *equivalenti* due gruppi di n punti di F, quando appartengono ad una I_n^r, deriva da ciò la transività della relazione di equivalenza ed il trasporto in questo campo dei teoremi di unicità e del resto; del concetto di serie virtuale, ecc.

La considerazione delle serie di equivalenza conduce a nuovi caratteri invarianti (assoluti) per trasformazioni birazionali. Li ho determinati, per alcuni casi semplici, in b). Essi son invarianti simultanei delle coppie di funzioni razionali di F.

Ho inoltre dimostrato l'esistenza sopra ogni superficie F di una serie principale (invariante) che ho chiamato la *serie canonica* S della superficie. Essa è d'ordine $I + 4$ (I invariante di Zeuthen-Segre). Se la F è irregolare, S contiene totalmente tutti i gruppi jacobiani degl' integrali semplici di 1ª specie.

La definizione di *valenza* γ ($\geqq 0$) di una corrispondenza T, fra i punti di F, rispetto alle serie principali, è ovvia. Reputo che le corrispondenze che hanno valenza rispetto alle serie principali siano quelle che hanno valenza nel senso di Zeuthen e per le quali è dunque conosciuto il principio di corrispondenza. Ciò è in stretta correlazione col fatto probabile che una famiglia completa di curve sghembe è unirazionale. È presumibile che la dimostrazione di questo fatto si ottenga estendendo i nn. 28, 29 della Memoria b).

Ometto per brevità di accennare alle estensioni alle varietà ed ai rapporti con le forme differenziali e tensoriali di 1ª specie.

THE GENERAL WEB OF SURFACES AND THE SPACE INVOLUTION DEFINED BY IT

By TEMPLE RICE HOLLCROFT, New York

The general web of surfaces is a triply infinite linear system of surfaces of order n. The web contains doubly infinite, singly infinite and finite systems of surfaces that satisfy respectively one, two and three invariant conditions. These conditions are imposed by singularities or contacts of surfaces of the respective systems. The Jacobian of the web is the locus of both the conic nodes and the simple contacts of the two doubly infinite systems. The loci of the four singly infinite systems are four curves on the Jacobian. The characteristics of these curves are obtained. The number of surfaces in each of the six finite systems and the positions of their associated singularities or contacts on the Jacobian are determined.

Webs of quadrics have been studied previously. Certain formulas for the general web do not hold when $n = 2$ since webs of quadrics have special properties that do not occur in webs of surfaces of higher order.

The surfaces of the web are in (1, 1) correspondence with the planes of space. The equations defining this correspondence establish a general space involution of order n^3 whose coincidence surface is the Jacobian. The properties of the web are determined by obtaining the characteristics of the branch-point, coincidence and residual surfaces of this transformation.

ÜBER DIE REGULÄREN SOMENKONGRUENZEN

Von O. MÜHLENDYCK, Berlin

Im nachstehenden werden die unten [1]) angeführten Arbeiten als bekannt vorausgesetzt.

Durch ein Soma allgemeiner Lage S einer regulären Somenkongruenz [2]) gehen gewisse ∞^1 Somen-M_1[3]), die als zur Stelle S gehörige *Normalschnitte* [4]) bezeichnet werden. Zunächst wird für die *duale Krümmung* [5]) der Normalschnitte an der Stelle S eine Formel aufgestellt, die der *Euler*schen Formel in der Flächentheorie entspricht, die aber nicht ausreicht zur Konstruktion der *Schmiegsomenkreise* [5]) der Normalschnitte an der Stelle S. Es wird dann erklärt, was unter der *dualen geodätischen Krümmung* einer auf der Somenkongruenz gelegenen Somen-M_1 verstanden werden soll. *Diese Krümmung bleibt bei einer Verbiegung* [6]) *der Somenkongruenz ungeändert.* Sie läßt sich zerlegen in die *skalare* und die *vektorielle geodätische Krümmung*. Für die Normalschnitte verschwindet an der Stelle S die skalare geodätische Krümmung, die vektorielle dagegen im allgemeinen nicht. Für diese wird eine Formel aufgestellt. In den Formeln für die duale Krümmung und die vektorielle geodätische Krümmung der Normalschnitte treten 11 Invarianten der Stelle S auf, von denen 5 Biegungsinvarianten sind. *Sind diese 11 Invarianten der Stelle S bekannt, so lassen sich die Schmiegsomenkreise der Normalschnitte an der Stelle S konstruieren.* Es treten verschiedene Ausnahmefälle auf, die eine besondere Untersuchung erfordern.

Eine ausführliche Darstellung erfolgt an anderer Stelle.

---

1) O. Mühlendyck: Zur Differentialgeometrie der regulären eindimensionalen Somenmannigfaltigkeiten, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 1925; Beitrag zur Differentialgeometrie der regulären Somenkongruenzen, Math. Ann. 1927; Geometrische Bedeutung des dualen Krümmungsmaßes und der dualen mittleren Krümmung einer Somenkongruenz, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein 1930. Im folgenden der Reihe nach mit I, II, III bezeichnet.

2) Reguläre Somenkongruenz s. II, S. 421.

3) Abkürzung für eindimensionale Somenmannigfaltigkeit.

4) Normalschnitt s. III, S. 57.

5) Duale Krümmung, Schmiegsomenkreis s. I, S. 50.

6) Verbiegung s. II, S. 428.

Geometrie

ON A SERIES OF CREMONA INVOLUTIONS DEFINED BY A PENCIL OF RULED SURFACES

By V. SNYDER, Ithaca, U. S. A.

Consider a pencil of surfaces $|F_n|$ through a rational curve r to multiplicity n-2. Let the points M of r and the surfaces of the pencil $|F|$ be in (l, k) correspondence. A point P fixes a surface F_p of the pencil and this in turn a point M on r. The line PM meets F_p, in one residual point P'. The relation between P, P' is an involutorial birational transformation of space. The case in which r is a straight line has been solved by Carroll [1]).

That in which r is a proper curve and the residual base simple and irreducible has been considered by Black [2]).

The latter includes that of the (ruled) quartics through a double space cubic curve r. The present paper discusses all possible cases in which every surface of the pencil is ruled. With the exception of the quartics through a double cubic curve (which may be composite) and the cubics with a common double directrix, the general case includes only the $|F_n|$ with an n-2 fold directrix line and a double curve r of order m, meeting the line in m-1 points. It is therefore included among those already obtained by Carroll. In both of the earlier papers mentioned, the residual curve is simple and non composite, except the quintic and its quadrisecant. Apart from the multiple directrix line and the double curve, the residual base of the pencil consists entirely of generators, each of which accounts for two parasitic lines. The interest lies in the role played by the fundamental lines of the second kind, and the contact conditions along the directrix curve. The new transformations include a number of well known types, but furnish infinitely many new ones in which m, n, k can each take any positive integral value.

---

1) American Journal of Mathematics, vol. 54 (1932).
2) Transactions American Mathematical Society, vol. 34 (1932).

SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES

Par H. KREBS, Berne

La déformation des surfaces peut être étudiée en cherchant à déterminer leurs deux formes fondamentales. Cette étude a été faite dans un mémoire qui paraîtra prochainement. La méthode permet de déterminer en particulier toutes les surfaces qui ont un élément linéaire de Liouville lorsque l'on suppose la surface rapportée à ses lignes de courbure (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1929, et Bulletin des Sciences mathématiques, 1932). Les surfaces qui présentent deux systèmes de cercles géodésiques et qui sont rapportées à leurs lignes de courbure peuvent être aussi complètement déterminées par cette méthode. La résolution de ces problèmes nécessite la connaissance des équations de Laplace qui ont leurs invariants égaux à l'ordre près et auxquelles correspondent des suites présentant un nombre pair d'équations. Ces équations de Laplace ont été données par l'auteur dans sa thèse (Paris 1925). Des applications de ces équations ont également été données dans la théorie des congruences.

SUR LA GÉOMÉTRIE CONFORME DES CONGRUENCES

Par PAUL DELENS, Le Havre

I. — J'ai fait, avec un repère pentasphérique $\boldsymbol{M A_0 A_1 A_2 P}$ de M. E. Cartan, l'étude des congruences de courbes ; j'en détache ici quelques résultats.

La congruence $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A}_0)$ étudiée est définie par le système de Pfaff $\omega_1 = \omega_2 = 0$, à trois variables indépendantes ; l'ensemble $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2)$ des trajectoires orthogonales, d'équation $\omega_0 = 0$, lui est associé.

Le repère choisi est d'abord défini par $\boldsymbol{A}_0$, sphère *harmonique* de $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2)$, portant en $\boldsymbol{M}$ les cercles osculateurs $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ des *asymptotiques conformes* $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A}_1)$, $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A}_2)$ et par $\mathcal{C}_0 = [\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2]$, cercle osculateur en $\boldsymbol{M}$ de $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A}_0)$. D'où les conditions

$$\omega_{01} = \lambda\, \omega_2, \quad \omega_{02} = \mu\, \omega_1 \qquad\qquad (\omega_i = d\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{A}_i, \ \omega_{ij} = d\boldsymbol{A}_i | \boldsymbol{A}_j).$$

Pour le *cas général* $\lambda + \mu \neq 0$, le repère, complètement fixé par $\lambda + \mu = 2$, dépend seulement des éléments différentiels du 2me ordre, et l'étude est aussi simple qu'en

géométrie euclidienne. Le cas $\lambda + \mu = 0$ (écarté dans la suite) est celui des *congruences isotropes,* à asymptotiques conformes indéterminées : la particularisation du repère dépend d'éléments différentiels d'ordre supérieur.

2. — La correspondance avec les invariants euclidiens s'obtient aussitôt à partir d'un repère initial euclidien ; en particulier $2\theta = \text{arc}\cos\frac{\mu-\lambda}{2}$ est l'angle des lignes de courbure, et la normalisation de $\boldsymbol{M}$ se fait comme pour une surface.

Les lignes de courbure, lignes *doubles* suivant lesquelles une sphère de courbure normale est tangente à la sphère infiniment voisine, reçoivent une *nouvelle définition* conforme $[\boldsymbol{M}\, d\mathcal{C}_0\, d\mathcal{C}_0] = 0$, $\omega_0 = 0$, qui les détermine directement (ainsi que les asymptotiques) à partir de la congruence $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A}_0)$.

3. — Pour une congruence *normale* $\mu = \lambda$, la distribution des cercles osculateurs $\mathcal{C}_0$ résulte de $\omega_0'' = [\chi'\, \omega_0] = 0$ $(\chi = d\boldsymbol{M} \mid \boldsymbol{P})$. Une congruence *orthoptique* est donnée par $2p_0 + \mu - \lambda = 0$ $(\omega_{12} = -\Sigma\, p_i\, \omega_i)$. Dans un *système ternaire* $p_1 = p_2 = 0$, les cercles osculateurs $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ se recoupent en $\boldsymbol{P}$. Pour un *système triple orthogonal* $\mu = \lambda$, $p_0 = 0$, les cercles $\mathcal{C}_0$ forment, pour $\omega_0 = 0$, des systèmes cycliques : la forme $[d\mathcal{C}_0\, d\mathcal{C}_0]$ définit alors une sphère $\boldsymbol{B}_0$, orthogonale à $\mathcal{C}_0$ et $d\mathcal{C}_0$, fonction de $\boldsymbol{M}$ *seul,* dont j'ai déjà rappelé l'importance.

BIBLIOGRAPHIE.

E. Cartan, Les espaces à connexion conforme (Ann. de la Soc. polonaise de Math., 1923, p. 171—221).

P. Delens, Méthodes et problèmes des géométries différentielles ... (Paris, 1927); *Géométrie des congruences de courbes* (*à paraître* Rendic. dei Circ. matem. di Palermo); *Congruences de cercles et systèmes cycliques* (Atti del Congresso..., Bologna 1928, IV, p. 399—407).

La présente Note sera développée dans un autre Recueil. (Dans le Mémoire en question, j'ai remplacé par son complément l'angle désigné ici par θ.)

SUR CERTAINS COMPLEXES DONT LES SURFACES PRINCIPALES ONT DES PROPRIÉTÉS PROJECTIVES REMARQUABLES

Par PAUL MENTRÉ, Nancy

1° Considérons dans l'Espace projectif réglé les complexes G tels que deux quelconques des trois familles de surfaces principales s'assemblent en congruences dépendant d'un paramètre. Ces complexes ont la généralité de trois fonctions arbitraires d'un argument. Parmi eux se trouvent tous les complexes G_0 applicables projectivement (au sens de M. *Fubini*) sur le complexe linéaire ; les propriétés que nous allons donner restent donc invariantes dans la déformation d'un complexe G_0.

Par transposition dans l'Espace conforme à quatre dimensions on trouve les hypersurfaces rencontrées par *M. Cartan* pour lesquelles deux des trois familles de lignes de courbure s'assemblent en surfaces dépendant d'un paramètre.

2° Les congruences dans lesquelles s'assemblent les surfaces principales d'un complexe G admettent un complexe linéaire osculateur ; ce sont donc en général des congruences W ; d'ailleurs les surfaces réglées tracées dans ces congruences W de façon à établir la correspondance entre les lignes asymptotiques des deux surfaces sont précisément des surfaces principales du complexe G.

Il peut arriver que les congruences dégénèrent en congruences pseudo-W admettant pour nappes focales une courbe C et une surface développable d'arête de rebroussement D, les deux courbes C et D étant deux lignes asymptotiques d'une même surface réglée.

3° Considérons sur la génératrice g d'un complexe G les quatre foyers inflexionnels de *Koenigs*. Il existe sur la génératrice g six autres points remarquables qui sont les points doubles des trois involutions définies par les quatre foyers répartis en deux couples ; ces six points décrivent les lignes asymptotiques d'une surface principale de G lorsque la génératrice g décrit cette surface principale.

Grâce à la propriété du rapport anharmonique des quatre points d'intersection d'une génératrice de surface réglée avec quatre lignes asymptotiques on pourra obtenir toutes les lignes asymptotiques des surfaces principales du complexe G.

4° D'autres nombreuses propriétés des complexes G ne sauraient trouver place dans un résumé. Je les donnerai prochainement dans un Mémoire.

Contentons-nous d'ajouter que si l'on considère le complexe linéaire Γ osculateur à l'une des trois congruences W d'assemblage de surfaces principales, ce complexe linéaire Γ, qui accompagne dans son déplacement à trois paramètres la génératrice g,

admet pour enveloppe deux complexes formés de tangentes asymptotiques de surfaces principales.

5⁰ J'ai déja montré dans une récente Note aux Comptes Rendus que dans le cas d'un complexe tétraédral harmonique les congruences d'assemblage s'obtenaient en coupant le complexe par trois faisceaux de complexes linéaires.

LE RÉSEAU (λ, ϱ)

Par M. LONG, Téhéran

Le réseau (λ, ϱ) définit d'une façon simple et élégante une surface rapportée à ses lignes de courbure, les fonctions figurant dans ce réseau étant des éléments métriques fondamentaux.

En désignant par 2ϱ le carré du rayon vecteur, par λ la distance de l'origine O des coordonnées au plan tangent à la surface (B) au point M, par θ et ω les distances de O aux plans principaux u, v en M (u et v étant les paramètres des lignes de courbure), on a la relation :

$$2\varrho = \lambda^2 + \theta^2 + \omega^2 \tag{1}$$

avec la propriété suivante:

Les coefficients A et B de l'équation :

$$\psi_{uv} = A\,\psi_u + B\,\psi_v \tag{2}$$

définie par la condition d'admettre comme solutions ϱ et λ, sont respectivement :

$$A = \frac{\theta_v}{\theta}\,, \quad B = \frac{\omega_u}{\omega}\,.$$

Inversement dès qu'on connaîtra deux fonctions ϱ, λ (chacune dépendant de 2 variables indépendantes u, v) assujetties à la seule condition d'être liées par la relation : $2\varrho - \lambda = A^2 + B^2$, aux quantités A, B, de l'équation de Laplace (2) qu'elles déterminent, on connaîtra immédiatement une surface (B) rapportée à ses lignes de courbure u, v, ainsi que tous ses éléments.

Le point de coordonnées ϱ, λ, décrit un réseau plan que j'appelle réseau (λ, ϱ).

UN PROBLÈME DE M. BRICARD

Par A. ERRERA, Bruxelles

M. R. Bricard a posé un problème que nous énoncerons comme suit : *Un avion survole, à une altitude constante, la Terre supposée sphérique. Quel est le plus petit trajet qui lui permette d'en photographier toute la surface ?*

A l'Association française pour l'Avancement des Sciences (Congrès de Bruxelles, juillet 1932) nous avons fait connaître les propositions suivantes :

Si, sur une sphère de rayon 1, l'on fait parcourir une ligne de Jordan J, simple, rectifiable et de longueur L, au pôle P d'une *calotte* (α), c'est-à-dire d'une calotte dont α (avec $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$) est le *rayon sphérique* ou distance sphérique du pôle de la calotte à sa base, le domaine *balayé* D possède une aire Δ et l'on a, si J est une ligne ouverte

$$(1) \qquad \Delta \leq 2L \sin\alpha + 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

et si J est fermée

$$(2) \qquad \Delta \leq 2L \sin\alpha .$$

Nous disons qu'une courbe J a un *empan* 2α, si la distance sphérique de deux quelconques de ses points est $\geq 2\alpha$, dès que *l'arc* qui les relie a une longueur $\geq \pi \sin\alpha$ (*les deux arcs,* si J est fermée).

Or, si J possède une courbure $\frac{1}{\rho}$, telle qu'on ait $|\rho| \geq \sin\alpha$ et si elle a un empan 2α, alors les inégalités (1) et (2) deviennent des égalités [1]).

Etant donné sur la sphère un domaine et une longueur $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, *nous nous demandions s'il existe une ligne la plus courte, telle que tout point du domaine soit à une distance sphérique* $\leq \alpha$ *de la ligne ?* Or, il résultait des propositions qui précèdent, que, s'il existe une pareille ligne J, telle qu'en la faisant parcourir par le pôle d'une calotte (α) le domaine balayé coïncide avec celui qui est donné, cette ligne répond à la question.

Appliquons ce résultat au problème de M. Bricard qui est équivalent à celui-là, si l'on prend pour domaine la surface totale de la sphère. Or, nous pouvons cons-

---

[1]) Nous avions déjà trouvé des résultats analogues dans le plan et sous des hypothèses plus générales (Mém. de l'Ac. R., Bruxelles 1932).

truire cette ligne J, dans le cas où $\frac{\pi}{2\alpha}$ est un nombre entier : la ligne sera une *spirale sphérique à deux pôles,* lieu du pôle d'une calotte (α), que l'on fait d'abord pivoter autour du pôle Nord de la sphère situé sur sa base, puis rouler le long de la frontière du domaine partiel déjà couvert, enfin pivoter autour du pôle Sud.

Les démonstrations, assez longues, seront publiées ailleurs.

SUR LES POINTS UNIS NON PARFAITS DES INVOLUTIONS CYCLIQUES APPARTENANT A UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

Par L. GODEAUX, Liége

Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier p, ne possédant qu'un nombre fini de points unis, $|C|$ un système linéaire de courbes composé au moyen de I_p et n'ayant pas pour points-base des points unis de I_p, Φ une surface image de I_p dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes C.

Considérons un point uni A, non parfait, c'est-à-dire tel que, dans le domaine du premier ordre de A, il n'y ait que deux points, A_1. A_2, unis pour I_p. Cela implique $p > 2$ (Severi). Les courbes C passant par A, que nous désignerons par C_1, ont en ce point une multiplicité $\alpha > 0$ et leurs tangentes sont confondues avec les directions AA_1, AA_2. Désignons par C_2 les courbes C_1 assujetties à avoir en A une tangente distincte de AA_1, AA_2, et ainsi de suite. On forme ainsi une suite de systèmes linéaires $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_\nu|$ ayant en A des multiplicités d'ordres croissants et, sauf le dernier, des tangentes fixes AA_1, AA_2 en ce point. Les courbes C_ν ont en A un point p-uple à tangentes variables.

Les singularités des courbes C_1, C_2, ..., $C_{\nu-1}$ au point A et la singularité pour la surface Φ du point A' homologue de A dépendent des points unis de I_p dans les domaines successifs de A sur F. Ces singularités présentent une grande variété comme on le voit dans le cas simple où I_p est engendrée par une homographie plane. Dans le cas d'une surface algébrique quelconque, nous avons étudié deux cas.

a) Les courbes C_1 ont un point $(n+1)$-uple en A, un point n-uple en A_1 et une suite de n points simples fixes, infiniment voisins successifs, dont le premier est A_2 $(p = 2n + 1)$.

Le point A' est multiple d'ordre $n + 1$ pour Φ, le cône tangent en ce point étant formé d'un cône d'ordre n et d'un plan. On a $\nu = n + 1$.

b) Les courbes C_1 ont en A un point double et sur chacune des branches d'origine A, une suite de p-2 points simples fixes, infiniment voisins successifs. La surface Φ possède en A' un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $\nu - 2$ points biplanaires dont le dernier est ordinaire. On a $p = 2\nu - 1$.

Pour $p = 3$, les deux cas coïncident.

Dans le premier cas, les courbes canoniques de Φ doivent passer par A'. Il se peut que les conditions imposées à ces courbes entraînent leur non-existence. Il existe par exemple une involution rationnelle d'ordre sept, ayant trois points unis du type a) appartenant à une surface de genre trois.

Bibliographie. Bull. de la Soc. Math. de France, 1919. Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1921, 1930, 1931. Mém. de la Soc. roy. de Liége, 1929, 1930, 1931.

SUR UNE TRANSFORMATION DES CONGRUENCES RECTILIGNES

Par PAUL VINCENSINI, Bastia

(C) étant une congruence rectiligne quelconque, D le rayon générateur, O un point fixe et a un angle donné. faisons tourner D de α autour de sa parallèle issue de O. D vient en Δ, et l'ensemble des droites Δ constitue une congruence (Γ) que nous dirons transformée de (C) par T (O, a).

Soit I la projection de O sur D, F et F' les foyers de D, P le produit $\overline{IF}.\overline{IF'}$, S : 2 la distance de O au plan moyen de D, π le paramètre moyen et $2d$ la distance des points limites sur D.

Au cours de T (O, a), les quantités qui précèdent restent liées par des relations intéressantes, que je ne ferai que signaler, me proposant d'en développer les conséquences dans un mémoire spécial.

a) P reste constant (Bulletin de la Société Math. de France 1931),

b) S' étant la valeur de S dans (Γ), on a :

$$S' = S \cos a + \pi \sin a.$$

c) La quantité $S^2 + \pi^2$ est un invariant.

Les invariants *a*) et *c*) dépendent de O. Leur combinaison fournit un troisième invariant intrinsèquement lié à (C):

d) Au cours de $T\ (O, a)$ la distance limite $2d$ reste invariable. D'après b), $T(\ O, 90^0)$ permute S et π ; d'où la transformation en problèmes d'enveloppes de problèmes relatifs au paramètre moyen.

En particulier: On sait déterminer toutes les congruences admettant un paramètre moyen donné d'avance sur chaque rayon de direction donnée.

Si $\pi = O$ [(C) est normale], *b*) donne $S' = S \cos a$: Au cours de $T\ (O, a)$ l'enveloppée moyenne de (C) reste homothétique d'elle même.

On déduit immédiatement par exemple, des remarques qui précèdent, la transformation suivante du problème de la recherche des surfaces pseudo-sphériques :

Les transformées $T\ (O, \frac{\pi}{2})$ des congruences pseudo-sphériques normales, sont les congruences à enveloppée moyenne point et à segment limite constant.

Parmi d'autres questions que l'on peut rattacher aux propositions qui précèdent, signalons :

Une nouvelle détermination des familles de surfaces minima associées.

La détermination de *toutes* les congruences isotropes admettant une enveloppée donnée, quand on en connaît *une*.

Une construction très simple de *toutes* les congruences à paramètre moyen constant à partir de l'une d'elles ; etc. . . . . .

ELEMENT TRANSFORMATIONS OF SPACE FOR WHICH NORMAL CONGRUENCES OF CURVES ARE INVARIANT

By EDWARD KASNER, New York

In this paper all transformations of lineal elements (x, y, z, y', z') of space are determined such that every normal congruence of curves shall be converted into a normal congruence. The infinite group obtained is isomorphic with the group of contact transformations in space. The only transformations in the new group which convert curves into curves are the conformal transformations, which form a 10-parameter subgroup. The results are of interest in connection with the optics of general isotropic media. It is shown that the only transformations which convert an involution pair of partial equations into an involution pair are contact transformations. An equivalent problem is the transformation of the class of all integrable Monge equations into itself.

SULLA CONNESSIONE DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE REALI

Di A. COMESSATTI, Padova

In una recente Memoria (Ann. di Mat. T. 5^0, 1928) ho assegnato per *l'ordine di connessione totale* $Z = \Sigma Z_i \quad 2m + 2$ d'una superficie algebrica reale F (con m falde, delle quali Z_i sono i numeri di Betti) l'espressione.

$$Z = R_2 - h \tag{1}$$

nella quale $R_2 = I + 4q + 2$ ha il noto significato, ed h designa il numero (massimo) di cicli bidimensionali indipendenti, della riemanniana V di F, che son trasformati in cicli omologhi dalla *simmetria* S immagine del coniugio di F. Ho poi precisato in $\varrho - \bar{\varrho}$ ($\bar{\varrho}$ numero base reale) l'apporto recato al numero h dai *cicli algebrici*, traendo dalla (1) la diseguaglianza

$$Z \leq R_2 - 2\,(\varrho - \bar{\varrho}), \tag{2}$$

che contiene come caso particolare la relazione $I + Z = 2\,(\bar{\varrho} - 1)$ da me stabilita nel 1915 per le superficie *razionali* reali.

L'inesistenza d'integrali doppi di 1ª specie d'una F, coi periodi tutti reali od immaginarî puri, recentemente avvertita dal Severi nell'ambito d'un importante teorema dello Hodge, consente di rinforzare notevolmente la (2), sostituendovi la doppia disuguaglianza

$$2\,(\bar{\varrho} + p_g) - R_2 \leq Z \leq R_2 - 2\,(\varrho - \bar{\varrho}) - 2\,p_g, \tag{3}$$

che, con alcune applicazioni, formerà l'oggetto della mia comunicazione.

Quì mi limiterò ad aggiungere che alla (3) si perviene passando attraverso alla

$$Z = R_2 - 2\,(\varrho - \bar{\varrho}) - 2\,r \tag{4}$$

nella quale r denota il numero (massimo) dei periodi *reali* indipendenti degl'integrali doppî *reali* di 1ª specie. Di integrali cosiffatti se ne possono sempre costruire p_g indipendenti; ed essi ammettono una tabella (in generale non primitiva) di $\varrho_0 = R_2 - \varrho$ periodi, dei quali r reali ed $j = \varrho_0 - r$ immaginarî puri.

La (4) è di per sè abbastanza notevole, e si presta a qualche applicazione elegante. Se ne possono ad es. dedurre i valori della coppia (r, j) per tutti i tipi di superficie di Kummer reali, e quelli della coppia $(\varrho, \bar{\varrho})$ per le superficie iperellittiche (di rango 1) reali, già ottenuti dal Lefschetz per altra via.

ON THE PROJECTIVE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF DEVELOPABLE SURFACES

By E. B. STOUFFER, Lawrence, U. S. A.

In this paper the projective differential properties of a developable surface D in the neighborhood of a general point Q on D are studied by means of the differential equation associated with its edge of regression C. This equation is of the form

$$(1) \qquad y^{(4)} + 4 p_1 y^{(3)} + 6 p_2 y'' + 4 p_3 y' + p_4 y = 0,$$

where x is the independent variable and where the permissable transformations are $y = \mu(x)\, \bar{y}$ and $x = \varphi(x)$.

If y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ are the coordinates of a general point y on C, the transformation $y = \mu(x)\, \bar{y}$ may always be so chosen that $\bar{y}_i'$ are the coordinates of Q. In the remainder of this paper we shall assume that (1) is the equation resulting from this transformation and that $\mu' = 0$ for further transformations.

Without disturbing the condition just imposed we may transform (1) into a new equation of the form

$$(2) \qquad Y^{(4)} + 6 P_2 Y'' + 4 P_3 Y' + P_4 Y = 0$$

by so choosing $\varphi(x)$ that $P_1 = \frac{1}{\varphi'}(p_1 + {}^3/_2\, \varphi''/\varphi') = 0$. The form (2) is maintained for further transformations if and only if $\varphi'' = 0$.

The variable Y of (2) and its derivates and the coefficients P_i and their derivatives are canonical forms of covariants which may be expressed in terms of the variable and coefficients of (1) by simple substitutions involving the fact that $\varphi''/\varphi' = -{}^2/_3 \cdot p_1$.

Equation (2) furnishes a direct and easy method of obtaining a canonical development for the equation of D in the neighbourhood of Q. The coordinates of any point in space may be expressed by $x_1 Y_i + x_2 Y_i' + x_2 Y_i'' + x_3 Y_i^{(3)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Consequently, (x_1, x_2, x_3, x_4) may also be used as its coordinates. The vertex $(0, 1, 0, 0)$ is the point Q and $(1, 0, 0, 0)$ is the point R of tangency to C of the generator passing through Q.

The parametric equations of the cubic C_3 osculating C at R may be easily found [1]). Planes passing through Q osculate C_3 at R and at a point T. The line tangent to C_3 at T intersects the plane tangent to D at Q in a point S.

[1]) Stouffer, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 34, p. 290—302.

If the four geometrically determined points R, Q, S, T are used as the vertices of the tetrahedron of reference the canonical development for the equation of D takes the form

(3) $$\mathcal{J} = {}^1/_2\, \xi^2 + {}^1/_6\, \xi^3 \eta + \theta_{3/30}\, \xi^5 + {}^1/_8\, \xi^2 \eta^2 + \theta_{4/1800}\, \xi^6 + \dots \quad \dots,$$

where $\theta_3 = 2\,P_3 - 3\,P_2'$ and $\theta_4 = 45\,P_2'' - 60\,P_3' + 25\,P_4 - 81\,P_2^2$.

The equation (3) makes possible the determination of an osculating quartic scroll which locates the unit point of the coordinate system. Many other properties of the surface follow directly. The geometrical significance of the vanishing of each of the simpler invariants is easily found.

Denton [1]) has studied this same problem by means of partial differential equations but his calculations are more difficult and his geometrical results more complicated.

PROJEKTIVE DIFFERENTIALGEOMETRIE DER FLÄCHEN MIT EINER SCHAR VON KEGELSCHNITTEN

Von GERHARD THOMSEN, Rostock

Sind u_α projektive Ebenenkoordinaten (hier wie im folgenden laufen die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu \dots$ von 1 bis 4 und über doppelt vorkommende Indizes wird summiert), so ist durch $a^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 0$ mit $a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha}$ und Rang $\{||a^{\alpha\beta}||\} = 3$ ein Kegelschnitt (KG) in Ebenenkoordinaten gegeben. Bei projektiven Abbildungen stellen die 10 homogenen, an eine Nebenbedigung genüpften KG-Koordinaten $a^{\alpha\beta}$ einen Tensor dar (abgesehen von einem gemeinsamen Faktor). Wir betrachten eine Schar $a^{\alpha\beta}(t)$ von KG, die nicht alle in einer Ebene gelegen sind (eine „KGS"). Führen wir dann einen konstanten (d. h. von t unabhängigen) in jedem Indexpaar schiefsymmetrischen Tensor vierter Stufe $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ein (der also nur eine wesentliche Komponente hat), so gilt, wenn $\dot{a}^{\alpha\beta} = \frac{d}{dt} a^{\alpha\beta}$ gesetzt wird, identisch in t:

(1) $$e_{\alpha\beta\gamma\delta}\, e_{\lambda\mu\nu\rho}\, a^{\alpha\lambda}\, a^{\beta\mu}\, a^{\gamma\nu}\, a^{\delta\rho} = 0$$

(2) $$e_{\alpha\beta\gamma\delta}\, e_{\lambda\mu\nu\rho}\, a^{\alpha\lambda}\, a^{\beta\mu}\, a^{\gamma\nu}\, \dot{a}^{\delta\rho} = 0$$

[1]) Denton Trans. Amer. Math. Soc., vol. 14, p. 175—208.

Setzen wir

$$B = e_{\alpha\beta\gamma\delta}\, e_{\lambda\mu\nu\rho}\, a^{\alpha\lambda}\, a^{\beta\mu}\, \dot{a}^{\gamma\nu}\, \dot{a}^{\delta\rho}$$

$$C = e_{\alpha\beta\gamma\delta}\, e_{\lambda\mu\nu\rho}\, a^{\alpha\lambda}\, \dot{a}^{\beta\mu}\, \dot{a}^{\gamma\nu}\, \dot{a}^{\delta\rho}$$

$$D = e_{\alpha\beta\gamma\delta}\, e_{\lambda\mu\nu\rho}\, \dot{a}^{\alpha\lambda}\, \dot{a}^{\beta\mu}\, \dot{a}^{\gamma\nu}\, \dot{a}^{\delta\rho}$$

so ist $B = O$ die Bedingung dafür, dass die Schnittgerade konsekutiver KG jeweils den Schar-KG berührt. Setzt man $\mathcal{J} = 3BD - 2C^2$ so ist $\mathcal{J} = O$ die Bedingung dafür, dass sich konsekutive KG schneiden. (Die Schar besteht dann aus KG, die durch die Linienelemente einer Raumkurve gelegt sind.) Gilt ausser $\mathcal{J} = O$ noch, dass in dem Tensorbüschel $c^{\alpha\beta} = \lambda a^{\alpha\beta} + \mu \dot{a}^{\alpha\beta}$ einer mit Rang $\|c^{\alpha\beta}\| = 2$ enthalten ist, und gilt daneben $B \neq O$, so schneiden sich konsekutive KG sogar in zwei Punkten. $\mathcal{J} = B = O$ kennzeichnet solche Scharen von KG, die durch die Linienelemente einer Raumkurve gelegt sind und in den Schmiegebenen verlaufen. Existiert in diesem Fall auch noch ein $c^{\alpha\beta}$ mit Rang $\|c^{\alpha\beta}\| = 2$, so bekommt man KGS, die durch je drei konsekutive Punkte einer Raumkurve gelegt sind. Im allgemeinen Fall $\mathcal{J} \neq O$, $B \neq O$ gibt es keine absolute projektive Invariante, die der Figur zweier unendlich benachbarter KG zugeordnet ist, aber es existiert ein invariant verbundenes Koordinatentetraeder mit Einheitspunkt und ein invarianter Parameter erster Ordnung, der durch

$$\int \frac{\sqrt{\mathcal{J}}}{B}\, dt$$

gegeben ist.

Die einzige Torse (ausser dem Kegel 2. O.) mit mindestens einer Schar von nichtzerfallenden KG ist die Tangentenfläche der Raumkurve 3. Ordnung, auf der es dann gleich 3 KGS gibt. Die Flächen, bei denen mindestens eine Schar der Kurven von Darboux aus KG besteht, zerfallen in zwei Familien. Die erste besteht aus den Hüllflächen solcher spezieller Scharen von Flächen 2. Ordnung (F_2), bei denen sich konsekutive F_2 längs eines KG berühren. Um zu einer Fläche der zweiten Familie zu gelangen, muss man von einer Raumkurve ausgehen, deren Tangenten alle einem festen linearen Strahlenkomplex angehören und durch die Linienelemente einer solchen Kurve in den Schmiegebnen verlaufende KG hindurchlegen. Aber dies muss nach einem ganz speziellen Gesetz geschehen, damit die KG eine Fläche der zweiten Familie erfüllen.

SUR LES COURBES QUADRATIQUES

Par GEORGES TZITZÉICA, Bucarest

J'ai indiqué dernièrement une méthode pour faire la classification des courbes quadratiques. Cette méthode, que j'ai obtenue par une généralisation d'un théorème de *M. Cartan,* a le caractère purement analytique. Je me propose actuellement de lui donner une interprétation géométrique.

Je suppose qu'il s'agit d'une courbe quadratique ordinaire, tracée dans un espace S_n à n dimensions sur une variété quadratique Q à n-1 dimensions. On a donc

$$(x\,x) = 0, \qquad (x'\,x') \neq 0,$$

où

$$(x\,x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2, \qquad x' = \frac{dx}{dt}.$$

On peut choisir le paramètre t et le facteur par lequel on peut multiplier les x_i: de manière que l'on ait

$$(x\,x) = 0, \qquad (x'\,x') = 1, \qquad (x''\,x'') = 0.$$

On peut faire alors la classification suivante :

$$\text{I. } (x'''\,x''') \neq 0;$$
$$\text{II. } (x'''\,x''') = 0,\ (x^{\mathrm{IV}}\,x^{\mathrm{IV}}) \neq 0;$$
$$\text{III. } (x'''\,x''') = (x^{\mathrm{IV}}\,x^{\mathrm{IV}}) = 0,\ (x^{\mathrm{V}}\,x^{\mathrm{V}}) \neq 0,$$

et ainsi de suite. Chaque classe est déterminée par un invariant relatif différent de zéro.

Voici maintenant l'interprétation géométrique. Je considère tout d'abord l'espace linéaire L_{n-3} à n-3 dimensions, conjugué par rapport à la variété Q du plan O_2 osculateur à la courbe quadratique au point x, de même que l'espace linéaire O_3 osculateur à trois dimensions à la courbe au même point. Les espaces linéaires L_{n-3} et O_3 se coupent en un seul point. Si ce dernier point n'appartient pas à la variété Q, la courbe quadratique est de la première classe.

Dans le cas contraire, je considère l'espace L_{n-4} conjugué à l'espace O_3 osculateur à la courbe, de même que l'espace osculateur O_4 à quatre dimensions. Les espaces linéaires L_{n-4} et O_4 ont un seul point commun. Si ce point n'appartient pas à Q, la courbe est de la deuxième classe.

On peut continuer de la même manière pour définir successivement les autres classes.

ÜBER DREIECKSNETZE AUS KREISEN UND PARABELN GLEICHER ACHSENRICHTUNG

Von KARL STRUBECKER, Wien

Herr *S. Finsterwalder* hat 1899 zuerst die Frage nach den geradlinigen Dreiecksnetzen der Ebene aufgeworfen [1]), die 1924 von den Herren *Graf* und *Sauer* dahin beantwortet wurde [2]), daß *das allgemeinste geradlinige Dreiecksnetz aus den Tangenten einer eventuell zerfallenden Kurve dritter Klasse hergestellt werden kann.*

Man hat sich seither bemüht, auch das allgemeinste *Dreiecksnetz aus Kreisen* anzugeben. aber bisher ohne vollen Erfolg. Immerhin aber gelang es 1929 Herrn *Volk* durch sehr elegante analytische Ueberlegungen eine *spezielle Klasse* von Dreiecksnetzen aus Kreisen aufzufinden, nämlich jene, die in linearen Kreisbündeln liegen [3]). — Im Vortrage wird nun gezeigt [4]), daß sich das schöne *Volk*sche Resultat durch geometrische Ueberlegungen einfachster Art unmittelbar aus dem genannten Satze der Herren *Graf* und *Sauer* herleiten läßt. Es gelingt dabei auch, das *Volk*sche Ergebnis noch ein wenig zu *erweitern* und zu zeigen, daß *die Mittelpunkte jener Kreise eines Kreisbündels, welche am Bau eines Dreiecksnetzes beteiligt sind, auf einer eventuell zerfallenden Kurve dritter Ordnung liegen und auf ihr ein Punktgitter bilden, das völlig dual ist zu einem geradlinigen Dreiecksnetz.*

Aehnlich wie im Fall der Kreise ist auch das allgemeinste *Dreiecksnetz aus Parabeln* gleicher Achsenrichtung derzeit noch unbekannt. Wohl aber gelingt es auch hier, eine einigermaßen *umfassende Klasse* von Dreiecksnetzen anzugeben, nämlich jene, deren aufbauende Parabeln gewissen zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, sogenannten *Parabelbündeln* angehören. Unter diesen kommt z. B. als ein regulärer Fall vor der Inbegriff der *Parabeln mit derselben Hauptachse;* ein Grenzfall aber ist etwa die Gesamtheit der *kongruenten Parabeln gleicher Stellung.* Es mag an dieser Stelle [5]) genügen, wenigstens für diese beiden Parabelbündel das Ergebnis zu formulieren. Es gilt:

---

[1]) *S. Finsterwalder,* Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Jahresber. Dtsch. Math. V. 6 (1899), S. 45—90.

[2]) *H. Graf und R. Sauer,* Über dreifache Geradensysteme in der Ebene, welche Dreiecksnetze bilden, Sitz Ber. bayr. Akad. d. Wiss. München 1924, S. 119—156.

[3]) *O. Volk,* Über spezielle Kreisnetze, Sitz.-Ber. bayr. Akad. d. Wiss. München 1929, S. 132—134.

[4]) Erscheint demnächst in den Monatsheften f. Math. u. Phys., 39, (1932).

[5]) Erscheint ausführlich an anderer Stelle.

Gegeben sei das Bündel der Parabeln mit derselben Hauptachse oder das Bündel der kongruenten und gleichgestellten Parabeln, weiter ein Paar getrennter oder benachbarter Parallelen zu deren Achsen und ein ganz beliebiges geradliniges Dreiecksnetz; ersetzt man dann jede Gerade dieses Dreiecksnetzes durch jene obigen Bündeln entnommene Parabel, welche durch die Schnittpunkte der Geraden mit dem gewählten Parallelenpaare hindurchgeht, dann erhält man das allgemeinste Dreiecksnetz, das sich aus Parabeln dieser Bündel herstellen läßt.

SUR CERTAINES LIGNES ET SURFACES

Par M. LONG, Téhéran

Soient u, v les paramètres des lignes de courbure d'une surface (B). Les formules : $u = \alpha + \beta$, $v = \alpha - \beta$, montrent qu'il existe une infinité de systèmes de lignes α, β, dépendant de deux fonctions arbitraires. J'appelle chacun de ces systèmes système $u + v$, $u - v$.

J'obtiens les résultats suivants :

1⁰ Les surfaces réelles dont la courbure totale principale est égale à la courbure normale totale dans un de leurs systèmes $u + v$, $u - v$, sont les surfaces telles que, dans un de leurs systèmes $u + v$, $u - v$, le double du rayon de torsion géodésique α soit égal au produit du rayon de courbure normale α par la tangente de l'angle de la courbe α avec la courbe β en un point M de la surface.

2⁰ Les surfaces dont la somme des courbures principales est égale à la courbure normale α (ou β) dans un de leurs systèmes $u + v$, $u - v$, sont les surfaces telles que, dans un système $u + v$, $u - v$, le double du rayon de courbure normale α soit égal au produit du rayon de torsion géodésique β par la tangente de l'angle formé par la courbe α avec la courbe β sur la surface.

D'autre part :

1⁰ Les systèmes de lignes α, β, tels que la courbure moyenne normale α, β, soit égale à la courbure moyenne principale, sont : 1⁰ les systèmes orthogonaux ; 2⁰ les systèmes à torsions géodésiques α, β, égales.

2⁰ Les systèmes de lignes α, β, telles que la somme des rayons de courbure principaux soit égale à la somme des rayons de courbure normale α, β, sont ceux pour lesquels le rapport des torsions géodésiques α, β, est égale, en module, au rapport des courbures normales correspondantes.

LES SURFACES (S) ET LES SURFACES (Σ)

Par M. LONG, Téhéran

J'appelle Surface (S) une surface telle que, pour un choix convenable de u et v ne modifiant pas les lignes coordonnées, on ait : $H = f\ (L)$ en posant : $H^2 = \Sigma\, x_u^2$, $L^2 = \Sigma\, x_v^2$, les x_i étant les coordonnées d'un point M d'une surface (B), u et v étant les paramètres des lignes de courbure.

Les Surfaces (S) dépendent de 5 fonctions arbitraires.

J'appelle Surface (Σ) une surface telle, u et v étant choisis, on ait : $h = f\ (l)$ en posant $h^2 = \Sigma\, \alpha_u^2$, $l^2 = \Sigma\, \alpha_v^2$, les α_i étant les cosinus directeurs de la normale.

Les surfaces (Σ) dépendent de 5 fonctions arbitraires. On les obtient toutes en prenant les surfaces parallèles aux Surfaces W.

Un groupe important de surfaces à la fois (S) et (Σ) est le groupe formé par les surfaces W.

Les Surfaces W peuvent être définies par l'équation : $hl - lH = UV$, U étant une fonction de u, V une fonction de v. Par un choix de u et v, on peut le ramener à la forme : $hL - lH = 1$.

Les surfaces isothermiques forment un groupe à 4 fonctions arbitraires de Surfaces (S). J'ai obtenu le résultat suivant pour ces surfaces :

Pour un choix convenable de u et v l'équation

$$\sigma_{uv} = \frac{H_v}{H}\,\sigma_u + \frac{L_u}{L}\,\sigma_v$$

à laquelle satisfont les 3 coordonnées x_i d'un point M de la surface, ainsi que la quantité $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, admet comme solution la quantité : $D - D''$, en posant : $D = \Sigma\, x_u\, \alpha_u$, $D'' = \Sigma\, x_v\, \alpha_v$.

LOCALLY HOMOGENEOUS SPACES IN DIFFERENTIAL GEOMETRY

By J. H. C. WHITEHEAD, Princeton

This paper deals with locally homogeneous spaces with a Lie pseudo-group, any one of which is locally equivalent to a homogeneous space with a Lie group. A completeness condition is given, and it is shown that if two of these spaces are complete and locally equivalent, their general covering manifolds are equivalent.

The completeness condition is suggested by Hilbert's axiom for continuity. It requires that no complete space in the class shall be the general covering manifold of a proper sul-set of another complete space. The weaker axiom actually used by Hilbert, is inadequate. The paper is closely related to the Clifford-Klein problem and to more recent work by E. Cartan, H. Hopf, W. Rinow, O. Schreier, to whom references are made.

THE SUB-SPACES ASSOCIATED WITH CERTAIN SYSTEMS OF CURVES IN A RIEMANNIAN SPACE

By C. H. ROWE, Dublin

In a space of N dimensions ($N > 2$) consider a system S of ∞^{2N-2} curves, a unique curve of S passing through a given point in a given direction. The curves of S that issue from a point P in the directions of a linear vector-space of M dimensions generate a sub-space of M dimensions, which we shall call a *sub-space associated with the point P*. I have shown that in general such a sub-space has a singularity at P, a parametric representation with continuous second partial derivatives at P being impossible; and that the only case in which such singularities never arise is that in which S consists of the paths of a linear connexion[1]).

In the present paper I impose an arbitrary Riemannian metric on the space, and I seek to characterize systems of paths having certain special relations to the metric by means of curvature properties of the corresponding sub-spaces associated with an arbitrary point. I consider (1) the systems, which I call *quadratic systems*[2]), defined by the property that the components of the first curvature vector of a curve of the system are equal to quadratic polynomials in the components of the unit vector tangent, (2) *velocity systems,* or systems such that there exists a vector-field whose component normal to any curve of the system coincides with the first curvature

[1]) A characteristic property of systems of paths, Proc. Royal Irish Acad., vol 40 A (1932), pp. 99—106.

[2]) In a paper, which has not yet been printed, I find that quadratic systems present themselves as the solution of the problem of determining the most general system of ∞^{2N-2} curves that has the property that, as a triangle formed with three curves of the system shrinks to a point, the excess of the sum of its angles over π is an infinitesimal of the same order as the area.

vector of the curve, (3) *natural systems,* or systems formed by the extremals of integrals of the form $\int f\,ds$ where f is a function of position, and s is the arc.

The following is one of the results of the kind in question that I have obtained: Quadratic systems, and no others, have the property that there exists a vector-field whose component at any point P normal to any V_{N-1} associated with P coincides with the mean curvature vector of the V_{N-1}; but if we read V_M for V_{N-1} in this, where M is any given integer less than $N - 1$, the property is possessed only by velocity systems.

I give some results of a different kind, among which is the theorem that quadratic systems are characterized among all systems of ∞^{2N-2} curves by the property that the sum of the first curvature vectors of N mutually perpendicular curves through a point depends only on the position of the point.

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER WINKELMETRIK IN FINSLERSCHEN RÄUMEN.

Von ST. GOLAB, Kraków

Die Räume, in welchen der Abstand ds von zwei unendlich nahen Punkten mit Hilfe der Funktion von $2n$ Variabeln:

$$ds = F(x_1, \ldots, x_n;\ dx_1, \ldots, dx_n)$$

definiert ist, haben nach ihrem ersten systematischen Untersucher den Namen „*Finsler*sche Räume" erhalten, obwohl gewisse Probleme dieses Gebietes vom Standpunkte der Variationsrechnung aus schon früher behandelt waren.

Es gibt vier verschiedene Definitionen der Winkel in Finslerschen Räumen, von denen eine, die unabhängig und fast gleichzeitig von *Berwald*, *Synge* und *Taylor* angegeben wurde, eine Sonderstellung besitzt, und daher hier beiseite gelassen werden möge. Von den drei übrigen stammt eine von *Finsler* selbst, zwei andere, chronologisch sogar frühere, von *Bliß* und *Landsberg*. Die erwähnten Definitionen fallen im allgemeinen miteinander nicht zusammen. Während die Definitionen von Bliß und Landsberg das Postulat der Additivität erfüllen, genügt die Metrik von Finsler diesem Postulat im allgemeinen *nicht*. Die Metrik von Finsler steht aber in gewisser Beziehung zu der Landsbergschen Metrik. Betrachtet man nämlich das

Winkelmaß als Intervallfunktional (fonction de ligne) und wird auf dieses Funktional die *Burkill'*sche Integraloperation angewandt, so gelangt man zu einem neuen, schon additiven Funktional, das in unserem Falle, vom Finslerschen ausgehend, das Landsbergsche darstellt. Der prinzipielle Unterschied zwischen der Metrik von Bliss und der von Landsberg liegt erstens darin, daß die zweite den Winkel als eine Integralinvariante definiert, wobei unter dem Integralzeichen partielle Ableitungen der Funktion F bis zu der zweiten Ordnung auftreten, während der Winkel von Bliss nur die Existenz der ersten Ableitungen unter dem Integralzeichen voraussetzt. Der zweite Punkt, in welchem beide Definitionen einen prinzipiellen Unterschied aufweisen, ist der, daß das Winkelmaß von Landsberg eines unendlich kleinen Winkels nur von den lokalen Eigenschaften der sog. Indicatrix von *Carathéodory* in der Umgebung von Winkelseiten abhängt, während das Winkelmaß von Bliß vom integralen Verlaufe der Indicatrix abhängig ist. Es erhebt sich die interessante Frage nach der allgemeinsten Gruppe der Geometrien von Finsler, für welche die beiden Definitionen von Bliss und Landsberg zusammenfallen. Diese Frage scheint mir sehr schwierig zu sein. Die Antwort auf diese Frage hängt von der Antwort über die Natur der Lösungen einer gewissen Funktionaldifferentialgleichung von der folgenden Gestalt ab:

$$f\,[x + \omega\,(f,\ f')] \equiv \Omega\,(f,\ f',\ f''),$$

wo $f(x)$ die gesuchte periodische Funktion ist, ω und Ω dagegen gegebene bekannte Funktionen darstellen. Wir wissen jedenfalls, daß die obige Gleichung eine dreiparametrige Schar von Kurven als einen Teil der Lösungen besitzt. Die Frage ob es alle Lösungen sind, bleibt vorläufig offen. Im bejahendem Falle würde dies bedeuten, daß nur für Riemannsche Räume die Definitionen von Bliß und Landsberg identisch sind.

Man kann sich nun die Frage stellen, welche von den erwähnten Definitionen des Winkels sich am praktischsten für die Anwendungen erweist. Eine direkte Antwort auf diese Frage kann nicht angegeben werden. Übrigens wurde in dieser Richtung nicht viel geleistet. Ich bemühe mich jetzt, die Resultate von *Grüß*, was die Theorie des Parallelismus in Finslerschen Räumen betrifft, zu übertragen, wenn man statt der Finslerschen die Definition von Bliß bzw. Landsberg als Ausgangspunkt nimmt. Im Interesse der Einfachheit empfiehlt sich hier die Einführung einer Modifikation der beiden Definitionen. Die Resultate in dieser Richtung habe ich noch nicht zu Ende gebracht und deswegen sollen sie hier nicht näher präzisiert werden.

Geometrie

CONFORMAL GEOMETRY IN THE COMPLEX DOMAIN

By EDWARD KASNER, New York

Real conformal geometry deals with the ∞^2 real points of the usual Gaussian plane under real conformal transformation. Complex conformal geometry, as discussed by Professor Kasner, deals with the totality of ∞^4 complex points of the plane under the larger group of complex conformal transformations. In earlier papers (see Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, vol. 2, p. 81—89, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 26, p. 333—349), it was shown that in the real plane a regular analytic curvilinear angle has an invariant of higher (finite) order only when its magnitude is a rational part of 2π (including the horn angles of magnitude 0). The present paper includes a complete classification of analytic angles in the complex plane. In contrast with the real discussion, it is shown that certain types of angle have an infinite number of higher invariants, and other types are capable of uniquely determining a conformal transformation. The bisection problem (defined in the paper cited) is also generalized and it is shown that the number of solutions may be not only 0, 1, 2, ∞, as in the real case, but also 3, 4, or any finite number. Another example of conformal invariant in complex space is given in Proc. Nat. Acad. Science, vol. 18 (1932), p. 261—264.

CURVATURE THEOREMS IN DYNAMICS

By EDWARD KASNER, New York

In this paper there are treated new and simple theorems concerning the motion of a particle in a general field of force. The first results concern the relation between the lines of force and the paths or trajectories. If a particle starts from rest, it begins to move along the line of force and then deviates from it on account of its acquired velocity. The path and the line of force will, therefore, have the same tangent but different curvatures. *The main result is that the curvature of the trajectory is one-third the curvature of the line of force.*

A separate discussion is necessary when, at the given point, the curvature of the line of force is zero, as for a point of inflexion. In this case we consider the ratio

of the departures of the two curves from the tangent line. In the main case this ratio would be 1 : 3, but now it is found to be 1 : 5, 1 : 7, 1 : 9 etc., depending on the order of contact with the tangent lines. *It is always of the form* 1 : $2n + 1$.

If the particle is projected in the direction of the force with a speed different from zero, the initial curvature will be zero and the departure will vary inversely as the square of speed.

It follows that, if any dynamical trajectory touches a line of force it will, at that point, have either zero curvature or else its curvature will be one-third of that of the force line.

This single infinity of paths obtained by starting at a given point in the force direction with varying speed will give departures varying inversely as the square of the speed, except for the single path due to zero speed, for which case the departure ratio will be of the form 1 : $2n + 1$.

These theorems apply to any continuous field of force, conservative or not, in flat or curved spaces of any dimensionality.

If a particle starts from a given point in a given general direction (different from the force direction) with varying speed v, we study in the second part of the paper the variation of the successive radii of curvature $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots\ldots$, and the loci of the successive centers of curvature C, C_1, C_2. Some of the results are given in earlier papers by the writer (*Trans. Amer. Math. Soc.* 1905—1906; *Princeton Colloquium Lectures,* 1913). The general result is that the locus of C_n is a rational curve of order $n + 1$.

SUR LE PRINCIPE D'HAMILTON APPLIQUÉ AUX SYSTÈMES NON HOLONOMES

Par G. VRÀNCEANU, Cernăuti

Il est bien connu comment on peut déduire les équations de mouvement d'un système holonome S_n du principe d'Hamilton, qui affirme que

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta P)\, dt = 0, \ (T = \tfrac{1}{2} a_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + a_i \dot{x}^i + T_0)$$

quelle que soit la variation δT de la force vive et la variation δP du travail mécanique, pour des déplacements virtuels δx^i nuls en t_0 et t_1. Pour démontrer l'identité

de (1) avec l'équation symbolique de la Dynamique, on suppose que $\delta \frac{dx^i}{dt} = \frac{d\delta x^i}{dt}$; c'est-à-dire que les covariants bilinéaires $\Delta x^i = \delta dx^i - d\delta x^i$ des x^i sont nuls, et de plus que $\delta dt = 0$, ou bien que $\Delta t = \delta dt - d\delta t = 0$, car $\delta t = 0$. Dans le cas d'un système non holonome S_n^m, qui peut s'obtenir en ajoutant à S_n, $n - m$ liaisons non holonomes, on ne peut pas plus supposer que les Δx^i sont tous nuls, de façon qu'on est obligé à modifier la forme (1) du principe d'Hamilton, si on veut qu'il soit identique à l'équation symbolique de la Dynamique (voir Z. *Horak, Sur les systèmes non holonomes,* Bull. de l'Acad. de Bohème, 1927).

Il s'agit de voir, dans quelles conditions on peut appliquer à S_n^m, le principe d'Hamilton sous la forme originaire (1). Si on choisit dans l'espace de Riemann V_n, associé à S_n ayant comme métrique $ds^2 = a_{ij}\, dx^i dx^j$, n congruences orthogonales, de façon qu'en indiquant avec $ds^a = \lambda_i^a\, dx^i$ $(dx^i = \lambda_a^i\, ds^i)$, les différentielles des arcs de ces congruences, les liaisons de non holonomie soient $ds^{h'} = e^{h'} dt$ $(h' = m + 1, \ldots n)$. (Voir ma Note, *Sopra i sistemi anolonomi.* Rend. dei Lincei, 1931, p. 38). nous avons les formules

$$(2)\quad \Delta s^a = \delta ds^a - d\delta s^a = (w_{bc}^a\, ds^b - \frac{\partial \lambda_i^a}{\partial t}\lambda_c^i)\,\delta s^c + \lambda_i^a\,\Delta x^i,\ (w_{bc}^a = \left(\frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_j^a}{\partial x^i}\right)\lambda_b^i \lambda_c^j).$$

Si on fait maintenant les conventions $\lambda_i^h\, \Delta x^i = 0$, $(h \leq m)$, $\Delta s^{h'} = \frac{\partial e^{h'}}{\partial s^a}\,\delta s^a\, dt$,

compatibles avec les liaisons et avec $\Delta t = 0$, le principe d'Hamilton peut s'écrire

$$(3)\qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta P)\, dt = - \int_{t_0}^{t_1} (e^{h'} + a_{h'})\, \lambda_i^{h'}\, \Delta x^i \ (a_{h'} = \lambda_{h'}^i\, a_i)$$

où T est exprimé à l'aide des caractéristiques cinétiques $u^a = \frac{ds^a}{dt}$ et Δs^h, $\lambda_i^{h'}\, \Delta x_i$ ont les valeurs données par les (2). Il en résulte qu'on peut appliquer à S_n^m le principe d'Hamilton sous la forme (1), si le vecteur $(e^{h'} + a_{h'})$ est nul, ou si la projection du vecteur Δx^i sur le vecteur est nulle. Dans ce dernier cas on peut s'arranger de façon que $(e^{h'} + a_{h'})$ soit dirigé suivant la congruence (n), et les conditions sont données par $w_{kh}^n = 0$ $(k, h, \leq m)$, qui expriment que la forme ds^n doit appartenir au *système dérivé* du système de Pfaff $ds^{h'} = 0$, et par la condition $w_{h'h}^n\, e^{h'} = \frac{\partial e^n}{\partial s^h} + \frac{\partial \lambda_i^n}{\partial t}\lambda_h^i$. Si S_n est à liaisons indépendantes du temps $(a'_{h'} = 0$, et si on choisit

(e) unitaire, cette dernière condition exprime que les composantes $\gamma_{nhn} = -w^n_{nh}$ *de la courbure géodésique* de la congruence (n), situées à l'intérieur de l'espace non holonome V^m_n, associé à S^m_n, sont égales aux quantités $-\frac{\partial \lambda^n_i}{\partial t} \lambda^i_h$, qui sont nulles, si l'équation $ds^n = dt$, ne contient pas le temps explicitement.

ÜBER DIE MÖGLICHKEIT EINER ABSOLUTEN AUSZEICHNUNG DER GRUPPE VON KOORDINATENSYSTEMEN IN VERSCHIEDENEN RÄUMEN

Von ST. GOLAB, Kraków

Das Kleinsche Prinzip, das die Definition und Kennzeichnung der Geometrien zum ersten Mal in strenger Form gegeben hatte, unterlag bekanntlich manchen Modifikationen und Verallgemeinerungen, um die später entwickelten Geometrien zu umfassen. In den modernen Geometrien wird als Basis die Gruppe aller analytischen und regulären Transformationen der Koordinaten festgelegt und die Art der Geometrie wird beschränkt durch die zusätzliche Voraussetzung der Existenz gewisser Invarianten bzw. Kovarianten. So weitgehende Regularität der Transformationen der Grundgruppe ist eigentlich nicht notwendig und kann, der Klasse der betrachteten Probleme nach, ersetzt werden durch eine mehr umfassende Gruppe. Wenigstens müssen wir aber voraussetzen, daß die Komponenten der Transformationen mit stetigen ersten Ableitungen ausgestattet sind. Ohne diese Voraussetzung verliert nämlich die Definition der kontra- und kovarianten Vektoren ihren geometrischen Charakter. Durch die Festlegung der Gruppe der Transformationen ist die Klasse der zulässigen Koordinatensysteme noch nicht eindeutig ausgezeichnet. Dies geschieht erst dann, wenn z. B. eines von den Koordinatensystemen in irgendwelcher Weise ausgewählt wird. Es ist klar, daß dies in den X_n-Räumen nicht stattfinden kann. In den Riemannschen und allgemeinen metrischen Räumen geschieht diese Wahl so, daß man die Existenz eines solchen Koordinatensystems postuliert, in welchem der Abstand von zwei unendlich nahen Punkten eine gewisse Gestalt hat. In allgemeineren nicht metrischen Räumen, die mit einer linearen Uebertragung ausgestattet sind, wird die Wahl der Klasse analog durch das Postulat der Existenz erledigt.

Von theoretischem Standpunkte aus könnte man glauben, daß andere (nicht zur

Klasse gehörige) Koordinatensysteme überhaupt nicht ins Spiel kommen, da auch die Transformationsformel der Transformation, die zur Gruppe nicht gehört, uns nicht bekannt ist. Es gibt jedoch Probleme, wo diese Tatsache berücksichtigt werden muß und wo wir über ein von irgendwo gegebenes Koordinatensystem entscheiden müssen, ob es zu der zulässigen Klasse gehört oder nicht. Zu dieser Art der Probleme gehören z. B. die Probleme über Abbildungen von zwei Räumen aufeinander. In diesen Fällen handelt man sehr oft folgendermaßen: In einem Raum wird irgendein Koordinatensystem der zulässigen Klasse gewählt. Dann setzen wir der Einfachheit der Rechnungen halber voraus, daß in dem zweiten Raume das Koordinatensystem so gewählt wird, daß die entsprechenden Punkte dieselben Koordinaten besitzen. Ein solches Verfahren ist nicht einwandfrei. Zunächst steckt hier die Voraussetzung, daß in beiden Räumen dieselbe Klasse von Koordinatensystemen festgewählt wurde. Das ist klar und natürlich. Wäre es nämlich nicht so, so hätten beide Klassen kein einziges Element gemeinsam und irgendwelche Vergleichung beider Räume wäre prinzipiell ausgeschlossen. Zweitens aber beschränkt das angedeutete Verfahren mehr oder weniger die Art der Abbildung, es bedeutet also eine implizite Voraussetzung über die Natur der Abbildung. Ich möchte hier das folgende Beispiel anführen. Es gilt der folgende von mir bewiesene Satz: Wenn zwei Riemannsche Räume derart aufeinander in der Umgebung von zwei entsprechenden Punkten abgebildet sind, daß die Winkel vom Maße α zwischen zwei von demselben Punkt ausgehenden Vektoren bei der Abbildung erhalten bleiben, wobei α eine gewisse konstante Zahl von der Eigenschaft:

$$0 < | \alpha - \pi | < \pi$$

ist, so ist die Abbildung in den betrachteten Punkten konform, d. h. es werden dann alle Winkel, was ihre Maße betrifft, bei der Abbildung erhalten. Der angegebene Satz ist jedoch nur dann richtig, wenn die Abbildung, über welche in der Voraussetzung gesprochen wird, mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen ist.

Die obigen Erwägungen können natürlich nicht angewandt werden auf die metrischen Räume im Sinne von *Fréchet,* da dort der Begriff des Koordinatensystems überhaupt nicht existiert.

Die Tatsache verdient Beachtung, daß in den X_n-Räumen, in welchen das Volumenmaß der offenen Mengen definiert ist, das gewissen einfachen und klassischen Bedingungen genügt, die Auszeichnung in der absoluten Weise der Klasse der Koordinatensysteme ermöglicht wird durch die Anwendung des bekannten Begriffes der verallgemeinerten Jacobischen Determinante, nämlich durch die Forderung, daß diese Determinante eine stetige Funktion des Punktes sei (was nicht in jedem Koordinatensystem besteht).

BEHANDLUNG DER ELEMENTARGEOMETRIE MIT EINEM GRUPPENKALKÜL

Von G. THOMSEN, Rostock

Die einzigen involutorischen Elemente der Gruppe der ebenen kongruenten Abbildungen sind die Spiegelungen an Punkten und die Spiegelungen an Geraden. Die Spiegelung an einem Punkte P (stets großer Buchstabe) soll gleichfalls mit P, die Spiegelung an der Geraden a (stets kleiner Buchstabe) soll wieder mit a bezeichnet werden.

Gruppenrelationen, die allein in Punkt- und Geradenspiegelungen geschrieben sind, heißen *Spiegelungsreihen.* Alle wichtigen Lagebeziehungen zwischen Punkten und Geraden der Ebene lassen sich in einfacher Weise beschreiben durch das Bestehen von Spiegelungsreihen in den Spiegelungen an den betreffenden Punkten und Geraden. So gilt z. B.

1. P und a sind nur dann *in vereinigter Lage,* wenn $Pa\,Pa = 1$ gilt, wo 1 die Identität bedeutet.
2. $a\,b\,a\,b = 1$ kennzeichnet für verschiedene a und b das *Senkrechtstehen* der Geraden a und b.
3. $a\,b\,c\,a\,b\,c = 1$ besagt, daß die drei Geraden a, b und c *einem Büschel angehören.*
4. $P\,Q\,R\,S = 1$ heißt: Die Punkte P, Q, R und S (in dieser Reihenfolge) *bilden ein Parallelogramm.*
   (Im Grenzfall $S = Q$ hat man: Q ist *Mittelpunkt* von $P\,R$.)
5. $a\,c\,b\,c = 1$ heißt: c ist *Winkelhalbierende* von a und b.
   (Falls a und b parallel: *Mittellinie.*)
6. $a\,b\,P\,a\,b\,P = 1$ heißt, falls $a\,b\,P$ nicht $= 1$, daß a und b *parallel* sind, während P ein ganz beliebiger Hilfspunkt ist.
7. $a\,b\,c\,d\,P\,a\,b\,c\,d\,P = 1$ heißt, falls $a\,b\,c\,d\,P$ nicht $= 1$, daß die Geradenpaare $a\,b$ und $d\,c$ gleichsinnig *kongruente Winkel* bilden, während P ein ganz beliebiger Hilfspunkt ist.
8. $a\,h\,a\,b\,c\,h\,b\,c = 1$ heißt, falls $a\,b\,c\,a\,b\,c$ nicht $= 1$, daß h die auf die Seite a gefällte *Höhe des Dreiecks a, b, c* ist.

In der Gruppe der ebenen kongruenten Abbildungen lassen sich die beiden Typen involutorischer Elemente dadurch unterscheiden, daß die Punktspiegelungen als Quadrate von Gruppenelementen (nämlich von Drehungen um 90^0) darstellbar sind, die Geradenspiegelungen (als Umlegungen) aber nicht.

Geometrie

Man kann zu einer ganz beliebigen (möglicherweise endlichen) Gruppe eine zugehörige künstliche Geometrie konstruieren, indem man die involutorischen Elemente in zwei Klassen einteilt, je nachdem, ob sie als Quadrat darstellbar sind oder nicht, und erstere *Punkte* (oder Punktspiegelungen), letztere *Gerade* nennt. Die geometrischen Lagebeziehungen definiert man nach der angegebenen Tabelle, z. B. heißen Punkt P und Gerade a koinzident, wenn die Gruppenrelation $PaPa = 1$ gilt. In solcher abstrakten Gruppengeometrie sind im allgemeinen sehr wenig Sätze der gewöhnlichen Geometrie richtig, z. B. können zwei Punkte keine, mehrere oder unendlich viele Verbindungsgerade und ebenso Mittelpunkte besitzen. Ein Mittelpunkt braucht nicht auf einer Verbindungsgeraden zu liegen. Ein Satz, der aber immer schon gültig ist, ist z. B. der sog. kleine Satz von *Desargues*. Da in einer allgemeinen Gruppengeometrie noch sehr wenig Sätze gelten, wird man sukzessive so lange Zusatzforderungen an die zugrunde gelegte Gruppe stellen, bis man die ganze euklidische Elementargeometrie gewinnt.

Die erwähnten Zusatzaxiome sind speziell so zu wählen, daß sie sich in übersichtlichen Rechenregeln für das Umformen von Spiegelungsreihen darstellen. Diese Umformungsregeln kommen dann zu denen hinzu, die allein aus den Gruppenaxiomen fließen. Man kann so einen rein gruppengeometrischen Kalkül zur Beherrschung der Elementargeometrie ausbilden, der den Zahlbegriff nicht benötigt.

Das Ziel ist dann, eine ein für allemal feststehende Methode der Gruppengeometrie auszubilden, mit der man jede Ausgabe der Elementargeometrie in gleicher Weise behandeln kann, d. h. der Gruppenkalkül muß die Elementargeometrie genau so „trivialisieren", wie dies die *Descartes*sche analytische Geometrie tut.

Es ist die Gruppengeometrie des dreidimensionalen und des n-dimensionalen Raumes in ähnlicher Weise auszubauen, wie die der Ebene [1]).

---

[1]) Näheres im Jahrgang 1932 der Mathematischen Zeitschrift.

EINE AXIOMATIK DER ELEMENTAR-GEOMETRISCHEN VERKNÜPFUNGSBEZIEHUNGEN

Von FRANZ ALT, Wien

Ein System von Axiomen für die elementargeometrischen Operationen des Verbindens und Schneidens in Analogie zu der Axiomatik der Operationen des Addierens und Multiplizierens im Körperbegriff der abstrakten Algebra, im Anschluß an eine Arbeit von Menger. (Jahresbericht d. D. M. V. 37; ferner Bergmann, Monatsh. f. Math. u. Phys. 36). Auch die Dimensionsverhältnisse können durch Verknüpfungsbeziehungen, unter anderem mit Hilfe der Teilerketten, beschrieben werden.

ÜBER EINE KONFIGURATION DESMISCHER VIERECKE

Von E. A. WEISS, Bonn

Die von *L. Klug* (Desmische Vierecke, Math. u. nat. Berichte aus Ungarn *38*, 1932) untersuchte Konfiguration von 15 Vierecken der Ebene, die sich auf 10 Paare konjugierter desmischer Viereektripel verteilen lassen, wird aus der von 6 Punkten des R_4 bestimmten Konfiguration (Hexastigm von *H. W. Richmond,* On the figure of six points in space of four dimensions, Quarterly Journal 1899, Math. Ann. 53, 1900) durch die bekannte Abbildung der Punkte eines R_4 auf die Paare konjugierter Geraden eines ebenen Polarsystems gewonnen.

ON A METHOD OF COMPARISON FOR STRAIGHT-LINE NETS

By LOUISE CUMMINGS, New York

The problem which led to this investigation of the structure of systems of straight lines in a plane was undertaken for the purpose of reclassifying, if possible, the 36 Weber-Aronhold sets of seven real double-tangents of a plane quartic curve. Two systems are defined as equivalent if one system can be derived from the other by a substitution upon the constituent lines, otherwise they are non-equivalent. Different ways of constructing straightline nets are known but easy and conclusive methods for comparing systems apparently different are at least not well known.

This paper shows a new method of comparison for systems of n lines, based on the *indices* [1]) of the $\frac{n(n-1)}{2}$ points of intersection of the system. By a simple process systems of n lines when no three of the lines are co-punctual are constructed. The method employed has been progressive step by step from three lines to four, from four to five, etc. All sets of five lines are of a single type, but for six lines there are four typical systems; for seven lines eleven non-equivalent types. Hence to form all systems of eight lines, I assume the eleven different possible bases; and for each of these sets of seven lines the different relative positions of an eighth line will furnish systems of eight whose equivalence or non-equivalence is tested by this new method of comparison. The present exhaustive census of *heptagonal* eights shows fifteen non-equivalent systems.

We have now two distinct methods of comparison that of *marks* developed by H. S. White [2]) and this of *indices,* both easy of application, which have given reliable and accordant results, positive as well as negative, in all cases in which they have been employed. Both methods lead to the easy discovery of the substitutions which transform any system into itself or into an equivalent system. The two methods have been applied to 36 Weber-Aronhold sevens and show a new distribution of the same into 11 non-equivalent subdivisions from which by the application of a group of order 8 all 288 sevens are readily derived.

[1]) At a point of intersection of the net the plane is divided into two regions, the *index* of the point enumerates the numbers of points of intersection which lie respectively inside these two regions.

[2]) The Plane Figure of Seven Real Lines, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 38 (1932) pp. 59—65.

ÜBER DIE BOGENLÄNGE

Von YUKIO MIMURA, Tokio

Es sei B ein einfacher Kurvenbogen mit der Länge $l(B)$. Es sei ferner M eine beliebige endliche Punktmenge auf B. Ich bezeichne mit G_M eine beliebige Punktmenge, welche zusammenhängend ist, M enthält und aus einer endlichen Anzahl von Strecken besteht. Die Summe der Längen dieser Strecken sei $l(G_M)$, die untere Grenze von $l(G_M)$ für ein festes M sei $g(M)$ und schließlich die obere Grenze von $g(M)$ sei $s(B)$. Die von Menger gestellte Frage, ob die Gleichung $l(B) = s(B)$ besteht, kann bejahend beantwortet werden.

Der Satz gilt für den Bogen in einem beliebigen metrischen Raum. Im Falle also, wo der Raum mit dem betrachteten Bogen identisch ist, stellt unser Satz einen neuen Beweis von einem Satz von Menger in den Math. Ann. Bd. 103, S. 467 dar.

ÜBER EBENE BEREICHE VON UNENDLICHEM ZUSAMMENHANG

Von B. KAUFMANN, Heidelberg

Es wird eine geometrische Theorie der Ränder ebener Bereiche von unendlichem Zusammenhang entwickelt. Diese Bereiche ($\mathfrak{B}_\infty$) sind — im Gegensatz zu den einfach zusammenhängenden ($\mathfrak{B}_1$) — kaum erforscht [1]. Auf der Grundlage der allgemeinen Primendentheorie [2] wird der (der Ebene eigentümliche) Aufbau der Randelemente untersucht. Wie gezeigt wird, finden die spezifischen Eigenschaften ebener Randelemente ihren Ausdruck vor allem in der *Verteilung und Anzahl* ihrer erreichbaren Stellen.

Von großer Bedeutung für die Struktur der Randelemente in $\mathfrak{B}_\infty$ erweist sich eine topologische Eigenschaft der Ebene, welche wohl am deutlichsten in einem von

[1]) Aus der Möglichkeit der konformen Abbildung (nach Hilbert, Köbe, Courant) der Bereiche $\mathfrak{B}_\infty$ auf Schlitzbereiche ließen sich bisher keine wesentlichen Schlüsse über die Struktur der Ränder ziehen. In diesem Zusammenhang wird auf das noch ungelöste, wichtige Problem der Ränderzuordnung bei konformen Abbildung der $\mathfrak{B}_\infty$ auf Schlitzbereiche hingewiesen.

[2]) Vrgl. Math. Annalen B. 103 (1930), S. 70—144, ferner B. 106 (1932), S. 308—333 und S. 334—342.

Herrn *K. Zarankiewicz,* anläßlich eines Problems des Herrn *Knaster,* bewiesenen Satz [1]) hervortritt.

Es sei zunächst daran erinnert, daß ein Randelement im Raum beliebig, insbesondere Kontinuum viele erreichbare Stellen enthalten kann: der das Randelement bestimmende Komplex Δ_ρ enthält entsprechend viele unbewallte Gesamtheiten $\mathfrak{P}_f$ vom α-Typus. (Jedem $\mathfrak{P}_f$ entspricht ein erreichbarer Punkt). Dabei kann die Ordnung ϱ des Komplexes beliebig (endlich oder abzählbar) sein. Sehr allgemein ist auch die Erzeugungsformel

$$\text{(R)} \qquad \Delta_\rho = {}_1\Delta_\eta + \sum M({}_1\Delta_\eta) + \sum M({}_2\Delta_\eta) + \ldots + \sum M({}_n\Delta_\eta) + \ldots$$

für Primendenkomplexe. Eine jede Gesamtheit M $({}_n\Delta_\eta)$ kann beliebig, auch unendlich viele Komplexe ${}_n\Delta_\eta$ $(\eta<\varrho)$ enthalten.

Demgegenüber werden nun für die ebenen (regulären) Komplexe folgende Sätze bewiesen.

I. Ein Komplex Δ_1 1. Ordnung enthält höchstens *drei* unbewallte Gesamtheiten $\mathfrak{P}_f$ [2]) (also drei erreichbare Punkte als Grenzstellen).

II. Die unbewallte Grenzmenge $\mathfrak{L}$ (Δ_ρ) eines Komplexes Δ_ρ (ϱ-beliebig) enthält höchstens *zwei* unbewallte Gesamtheiten $\mathfrak{P}_f$ [3]).

III. In der Vereinigung ΣM $({}_n\Delta_1)$ für jedes Glied M $({}_n\Delta_1)$ der Erzeugungsformel (R) für $\varrho=2$ gibt es höchstens *zwei* unbewallte Gesamtheiten $\mathfrak{P}_f$.

IV. Zu jedem Komplex Δ_η der Grundmenge M (Δ_η) von Δ_ρ für $\varrho>2$ gibt es höchstens *zwei* benachbarte. Demnach enthält jedes Glied M $({}_n\Delta_\eta)$ in (R) höchstens *zwei* Komplexe. Die Formel (R) kann für die Ebene auf die besonders einfache Gestalt gebracht werden [4]):

$$\text{(E)} \qquad \Delta_\rho = \Delta_\eta + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} {}_n\Delta_\eta = \ldots + {}_{-2}\Delta_\eta + {}_{-1}\Delta_\eta + \Delta_\eta + {}_1\Delta_\eta + {}_2\Delta_\eta + \ldots$$

Aus den obigen Sätzen ergibt sich der wichtige Satz:

---

[1]) Dieser Satz lautet: Gegeben seien drei beschränkte Bereiche $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, von welchen jeder im komplementären Raum der beiden andern liegt. Sind $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ drei zueinander fremde Kontinua, welche gleichzeitig alle drei Bereiche treffen (also $\mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{K}_j \neq 0$ für alle $i, j = 1, 2, 3$), so zerschneidet mindestens ein $\mathfrak{K}_j$ mindestens eines der Gebiete $\mathfrak{A}_i$. (K. Zarankiewicz, Über eine topologische Eigenschaft der Ebene, Fund. Math. B. XI, S. 19—26.)

[2]) In dem klassischen Spezialfall $\mathfrak{B}_1$ gibt es höchstens eine unbewallte Gesamtheit in Δ_1. Daraus ergibt sich der Carathéodorysche Satz, wonach ein Randelement in $\mathfrak{B}_1$ höchstens einen erreichbaren Punkt enthält.

[3]) Sehr kennzeichnend für die Gestalt der Randelemente in $\mathfrak{B}_\infty$ ist auch der weitere Satz, wonach $\mathfrak{L}$ $(\Delta\rho)$ auch höchstens zwei zyklische konjugierte Mengen Δ (vom β-Typus) enthalten kann.

[4]) Eine entsprechende Darstellung für $\rho = 2$ erfordert eine besondere Betrachtung. Insbesondere müssen die Komplexe ${}_n\Delta_1$ durch die sie einschließenden Enden erstetzt werden.

V. Ein beliebiger Komplex Δ_ρ in der Ebene enthält höchstens *abzählbar* unendlich viele unbewallte Gesamtheiten.

Aus dem Satz V folgt der Hauptsatz der Theorie:

Ein ebenes Randelement enthält höchstens abzählbar viele erreichbare Punkte.

Aus dem Hauptsatz ergibt sich die Lösung des Mächtigkeitsproblems:

Die Gesamtheit der Randelemente eines jeden ebenen Bereiches (insbesondere auch im $\mathfrak{B}_\infty$*) hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Weitere Sätze betreffen die Teilbarkeitseigenschaften der Randelemente der $\mathfrak{B}_\infty$[1]).

Ueber den Rahmen dieser Untersuchung hinaus wird die besonders interessante Eigenschaft der Ebene geschildert, nämlich die Unmöglichkeit ebener Randelemente fünfter Art. — Auch die Verallgemeinerung für $\mathfrak{B}_\infty$ des von *Urysohn* gelösten *Carathéodoryschen* Problems, wonach der Rand eines ebenen Bereiches sich niemals nur aus Randelementen zweiter Art zusammensetzen kann, wird kurz erläutert.

DIMENSIONSTHEORIE

Von P. ALEXANDROFF, Moskau

Bericht über die unter dem gleichen Titel in den Mathematischen Annalen (106, 1932, S. 161—238) erschienene Arbeit.

ÜBER STETIGE ABBILDUNGEN TOPOLOGISCHER RÄUME

Von W. HUREWICZ, Amsterdam

Ein n-dimensionaler Raum sei eindeutig und stetig auf einen $(n+k)$-dimensionalen Raum R^* abgebildet. Versteht man dann für einen Punkt p von R unter $\mu(p)$ die Anzahl der Punkte von R^*, denen p als Bild zugeordnet ist, so nimmt die Funktion $\mu(p)$ auf R^* mindestens $k+1$ verschiedene Werte an. In einigen wichtigen Spezialfällen kann diese Schranke sogar auf $k+2$ erhöht werden.

---

[1]) Der Verfasser sprach insbesondere über die Möglichkeit einer ***direkten*** Bestimmung der Randelemente in B_∞ als ***größte Randteiler mit höchstens abzählbar unendlich vielen Einheitsteilern.*** Unter einem Einheitsteiler des Randes wird ein beliebiges Endgebilde verstanden, das entweder ***nur erreichbare*** oder ***nur nichterreichbare*** Stellen enthält.

ÜBER DIE ZERLEGUNG EINER EUKLIDISCHEN n-DIMENSIONALEN VOLLKUGEL IN n MENGEN

Von KAROL BORSUK, Warszawa

Der Zweck dieses Referates ist, den Beweis folgenden Satzes zu skizzieren:

Satz (T). Bei jeder Zerlegung einer n-dimensionalen euklidischen Vollkugel in n Mengen ist der Durchmesser mindestens einer von diesen Mengen dem Durchmesser der ganzen Kugel gleich.

Trotz des elementargeometrischen Charakters dieser Behauptung scheint es keinen elementargeometrischen Weg zu geben, der zum Beweise führt. Unser Beweis, der rein topologischer Natur ist, stützt sich auf die zwei folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Bei jeder stetigen Abbildung f einer k-dimensionalen euklidischen Sphäre S_k auf eine Teilmenge des Raumes R_k [1]) *gibt es zwei antipodische* [2]) *Punkte $p, p^* \varepsilon S_k$ derart, daß $f(p) = f(p^*)$ ist.*

Hilfssatz 2. Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ abgeschlossene Teilmengen eines metrischen Raumes M, wobei $M = \sum_{i=1}^{n} A_i$ ist, so gibt es eine stetige Funktion f, welche M auf eine Teilmenge von R_{n-1} derart abbildet, daß für jeden Punkt $q \varepsilon f(M)$ die Urbildmenge $f^{-1}(q)$ in mindestens einer der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ enthalten ist.

Der erste dieser Hilfssätze läßt sich leicht auf folgenden Satz reduzieren:

Jede stetige und antipodentreue [3]) *Abbildung der S_k in sich ist wesentlich* [4]), den man elementar, oder einfacher mit Hilfe der Abbildungsgradtheorie [5]), beweisen kann.

Um den zweiten Hilfssatz zu beweisen, betrachtet man ein $(n-1)$ - dimensionales Simplex $\varDelta \subset R_{n-1}$ und eine simpliziale Zerlegung von $\varDelta$ in $(n-1)$ - dimensionale Simplexe $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots \varDelta_n$. Man kann dann leicht eine stetige Funktion f derart konstruieren, daß für jedes Indexensystem $i_1, i_2, \ldots, i_s$, $(1 \leq i_\nu \leq n, \nu = 1, 2 \ldots, s)$, $f(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \ldots A_{i_s}) \subset \varDelta_{i_1} \cdot \varDelta_{i_2} \cdot \ldots \cdot \varDelta_{i_s}$ gilt, womit die Behauptung des Hilfssatzes 2 bewiesen ist.

---

1) R_k bezeichnet hier, wie üblich, den k-dimensionalen euklidischen Raum.

2) d. h. Punkte, welche symmetrisch rel. zum Mittelpunkte von S_k gelegt sind.

3) d. h. eine solche, welche jedes antipodische Punktepaar in ein antipodisches Punktepaar abbildet.

4) d. h. sie läßt sich nicht stetig so abändern, daß die Bildmenge ein echter Teil von S_k wird.

5) Den einfachen Beweis mit Hilfe der Abbildungsgradtheorie verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn H. Hopf.

Wäre nun der Satz (T) falsch, so ließe sich leicht mit Hilfe des Hilfssatzes 2 eine Funktion f konstruieren, welche S_{n-1} auf eine Teilmenge von R_{n-1} so abbildet, daß der Durchmesser der Urbildmenge jedes Punktes $q \varepsilon f(S_{n-1})$ kleiner als der Durchmesser von S_{n-1} wäre, was, auf Grund des Hilfssatzes 1, unmöglich ist.

Aus dem Satze (T) ergibt sich fast unmittelbar folgendes *Korollar: Bei jeder Zerlegung einer Vollkugel im Hilbertschen Raume in endlich viele Mengen ist der Durchmesser mindestens einer von diesen Mengen dem Durchmesser der ganzen Kugel gleich.*

EIN ZERLEGUNGSSATZ ÜBER UNIKOHÄRENTE KONTINUA

Von BRONISLAW KNASTER, Warszawa

Nach *K. Borsuk* (vgl. vorstehende Mitteilung) enthält bei jeder Zerlegung der Oberfläche S_n einer n-dimensionalen euklidischen Vollkugel K_n in $i \leqq n$ abgeschlossene Teilmengen mindestens eine dieser Teilmengen Antipodenpunkte. Wird allgemein unter (topologischem) *Antipodismus* beliebige stetige, involutorische und fixpunktfreie Transformation eines topologischen Raumes in sich selbst verstanden und derartig transformierbare Räume *in sich antipodisch* genannt, so entsteht die Frage nach einer topologischen Charakterisierung derjenigen in sich antipodischen Gebilde, welche stets obige Zerlegungseigenschaft aufweisen.

Für $i \leqq 2$ sind es, wie leicht ersichtlich, sämtliche in sich antipodische *zusammenhängende* Räume. Für $i \leqq 3$ läßt sich der Satz jedenfalls für alle in sich antipodische *lokal zusammenhängende unikohärente Kontinua* auf Grund folgender Hilfssätze (wo allgemein X^* das antipodische Bild der Menge X bedeutet) beweisen:

1. Ist $R = R^*$, $P = P^*$ und $P \subset R$, so ist auch $(R - P) = (R - P)^*$.

2. Ist Q eine Komponente von $R = R^*$, so ist auch Q^* eine solche. Folglich enthält jeder aus einer ungeraden Anzahl von Komponenten bestehende Raum $R = R^*$ mindestens eine Komponente $Q = Q^*$.

3. Ist R ein *lokal zusammenhängendes Kontinuum,* so läßt sich jede abgeschlossene Teilmenge A von R, und zwar für jedes $\varepsilon > 0$, in eine sie ε-umhüllende abgeschlossene Teilmenge A_1 von R derart einschließen, daß $R - A_1$ aus einer endlichen Anzahl von Komponenten besteht

4. Ist überdies R *unikohärent* und M, N dessen abgeschlossene zueinander punktfremde Teilmengen, besteht ferner $R - M$ aus m und $R - N$ aus n Komponenten, so besteht $R - (M + N)$ aus $m + n - 1$ Komponenten (vgl. z. B. *S. Straszewicz,* Fundam. Math. VII, 1925, S. 179, Hilfssatz I).

Wird nun ein derartiges Kontinuum $R = R^*$ in 3 abgeschlossene Teilmengen A, B und C zerlegt und $A \cdot A^* = 0$ vorausgesetzt, so denken wir uns zunächst A nach (3) in A_1 derart eingeschlossen, daß noch $A_1 \cdot A_1^* = 0$ gilt und daß $R - A_1$ aus einer endlichen, also daß die Menge $R - (A_1 + A_1^*)$ nach (4) aus einer ungeraden Anzahl von Komponenten besteht. Da aber diese Menge nach (1) in sich antipodisch ist, so enthält sie nach (2) eine in sich antipodische Komponente Q. Wegen $R = A_1 + B + C$ und $Q \subset R - A_1$ ist $Q \subset B + C$, also eine Zerlegung von Q in 2 in Q abgeschlossene Teilmengen $Q \cdot B$ und $Q \cdot C$ gegeben, woraus nach dem für $i \leq 2$ anfangs erwähnten Fall entweder $B \cdot B^* \neq 0$ oder $C \cdot C^* \neq 0$ folgt, w. z. b. w. Das Problem für $i > 3$ bleibt offen.

Aus dem Satz von *Borsuk* ergibt sich u. a. als eine Folgerung (mit Hilfe des Fixpunktsatzes), daß, für jedes n, die zwei Gebiete, in welche S_n durch ein topologisches S_{n-1} zerschnitten wird, nie antipodenfremd sein können. Denn unter den Voraussetzungen von (1) ist auch die abgeschlossene Hülle von P in sich antipodisch.

Eine andere Verallgemeinerung des *Borsuk*schen Satzes wäre es, das größte Diameter der Teilmengen zu bestimmen, welches bei Zerlegungen von S_n in $i > n$ Teilmengen noch vorkommen muß.

LA NOTION DE VARIÉTÉ ET LES THÉORÈMES DE DUALITÉ

Par E. ČECH, Brno

Toutes les définitions connues d'une variété (Mannigfaltigkeit, manifold) V supposent ou bien que V soit un complexe, ou du moins que chaque point de V possède un voisinage qui soit un complex. On peut introduire une nouvelle définition de la variété V ne faisant usage que des propriétés topologiques intrinsèques de V. Les théorèmes de dualité de Poincaré et de M. Alexander sont valables pour les nouvelles variétés. Ma démonstration ne fait aucun usage des polyèdres. Un exposé complet paraîtra dans les *Annals of Mathematics.*

SUR LA NOTION D'HOMOLOGIE ET LES RÉSIDUS D'INTÉGRALES MULTIPLES

Par G. DE RHAM, Lausanne

L'analogie qui existe entre la théorie des champs d'intégration (théorie topologique des homologies et des intersections) et la théorie des formes différentielles extérieures (éléments d'intégrales multiples) suggère l'idée de considérer un champ à q dimensions et une forme de degré $n-q$ attachée à une variété à n dimensions comme deux aspects d'une même notion plus générale qu'on peut appeler courant à q dimensions. Il est possible de développer une théorie de ces courants, qui apparaît comme une généralisation naturelle de la théorie des champs et qui s'est montrée utile pour l'étude des applications de la topologie à l'analyse [1]). En particulier, elle permet de clarifier la notion de résidus d'intégrale multiple et fait comprendre pourquoi, si les résidus d'une intégrale simple attachée à une courbe algébrique apparaissent comme un système fini de points affectés de coefficients numériques, *les résidus d'une intégrale multiple d'ordre p attachée à une variété algébrique à d dimensions (complexes) consistent en un système fini de variétés algébriques à $d-1$ dimensions (complexes) affectées d'intégrales d'ordre $p-1$*, et les périodes polaires de la première se réduisent aux périodes (polaires ou cycliques) des dernières. On retrouve ainsi, de manière naturelle, les résultats de Poincaré sur les résidus des intégrales doubles [2]).

DER ALLGEMEINE DUALITÄTSSATZ FÜR ABGESCHLOSSENE MENGEN

Von L. PONTRJAGIN, Moskau

Es sei K die Gruppe aller Drehungen der Kreislinie in sich, aufgefaßt als additive kontinuierliche Gruppe der modulo 1 reduzierten reellen Zahlen. Wir untersuchen zunächst die Gruppe X aller homomorphen Abbildungen einer beliebigen topologischen Abelschen [3]) Gruppe G in die Gruppe K.

---

[1]) Voir à ce sujet l'Introduction et le chapitre III de ma thèse, Sur l'Analysis Situs des variétés à n dimensions (Journal de math. pures et appl. 1931, p. 115 et suivantes).

[2]) H. Poincaré, Sur les résidus des intégrales doubles (Acta mathematica, 9, p. 321).

[3]) Die Abelschen Gruppen ohne Limesrelationen bilden einen Spezialfall der topologischen Abelschen Gruppen; der betreffende Raum besteht dann aus lauter isolierten Punkten.

Unter einer homomorphen Abbildung wird dabei eine eindeutige Abbildung verstanden, welche einen Gruppenhomomorphismus einerseits und eine stetige Abbildung des betreffenden topologischen Raumes andererseits darstellt. Die Gruppe X heißt die *Charakterengruppe* von G. Die Gruppenoperation (die Addition) wird in X wie folgt definiert:

$$f = f_1 + f_2,$$

wenn für jedes x aus G

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

ist.

Die Gruppe X ist topologisch auf Grund folgender Limeserklärung: die Folge $f_1, f_2, \ldots, f_k \ldots$ von Elementen von X konvergiert gegen f, wenn für jedes Element x von G

$$\lim f_k(x) = f(x) \text{ ist.}$$

Man betrachte nun die Gruppe K als *Koeffizientenbereich* [1]) (wir nennen ihn den Koeffizientenbereich *modulo* 1).

Man kann sodann alle Grundbegriffe der kombinatorischen Topologie (Zyklen, Ränder, Homologie) in bezug auf den Koeffizientenbereich modulo 1 definieren und sie in üblicher Weise auf abgeschlossene Mengen übertragen. Man erhält auf diese Weise *die Bettischen Gruppen modulo 1 für jede abgeschlossene Menge F*. Die r-dimensionale Bettische Gruppe modulo 1 von F bezeichnen wir mit $B_1^r(F)$.

Diese Gruppe fassen wir wie folgt als eine topologische Gruppe auf: die ε-Umgebung $U(\zeta, \varepsilon)$ eines Elementes ζ von $B_1^r(F)$ definiert man so: ein Element ζ' von $B_1^r(F)$ gehört dann und nur dann zu $U(\zeta, \varepsilon)$, wenn die Homologieklasse $\zeta' - \zeta$ einen wahren Zyklus

$$Z^r = (z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r, \ldots)$$

von folgenden Eigenschaften enthält: a) alle z_k^r sind ε-Zyklen und untereinander ε-homolog; b) die Summe der Koeffizientenbeträge von z_1^r ist kleiner als ε. (Die Koeffizienten, die Elemente von K sind, werden als reelle Zahlen mit Beträgen $\leqq \frac{1}{2}$ aufgefaßt.)

Man beweist, *daß die topologische Gruppe $B_1^r(F)$ kompakt*, daß ferner die *Charakterengruppe einer kompakten topologischen Abelschen Gruppe eine diskrete höchstens abzählbare Gruppe ist.*

---

[1]) Vgl. P. Alexandroff „Einfachste Grundbegriffe der Topologie", Berlin, Springer, 1932, S. 24 (Anm. 23) und S. 35 (Anm. 40). Nicht nur Ringe, sondern auch Gruppen dürfen als Koeffizientenbereiche auftreten.

Schließlich gilt der

Dualitätssatz. *Ist $F \subset R^n$, so ist die Charakterengruppe der Gruppe $B_1^r(F)$ der gewöhnlichen* (in bezug auf den Ring der ganzen Zahlen definierten) $n - r - 1$-*dimensionalen Bettischen Gruppe von R^n—F isomorph.*

Man sieht, daß dieser Satz auch für den Fall, daß F ein Polyeder ist, Neues ausspricht. Als Korollar erhält man den

Invarianzsatz. *Sind F und F' homöomorphe abgeschlossene Mengen des R^n, so sind die Bettischen Gruppen von R^n—F den entsprechenden Gruppen von R^n—F' isomorph.*

POINCARÉ'SCHE RÄUME

Von HERBERT SEIFERT, Dresden

Während die Frage, wieviele *topologisch* nicht auf einander abbildbare geschlossene dreidimensionale Punktmannigfaltigkeiten es gibt (Homöomorphie-Problem), bisher ungelöst ist, kann jeder geschlossene dreidimensionale *gefaserte* Raum durch ein System von Zahlen, die Faserinvarianten, vollständig charakterisiert werden, derart, daß zwei gefaserte Räume dann und nur dann *fasertreu* aufeinander abbildbar sind, wenn sie in diesen Zahlen übereinstimmen. — Ein gefaserter Raum ist eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, deren Punkte auf ∞^2 geschlossene Kurven, Fasern, verteilt sind; durch jeden Punkt geht genau eine Faser hindurch, und jede Faser H hat eine Faserumgebung, das ist eine solche H enthaltende Teilmenge von Fasern, die sich fasertreu auf einen „gefaserten Vollring" abbilden läßt, wobei H in die mittlere Faser übergeht. Ein gefaserter Vollring ist ein gerader Kreiszylinder des euklidischen Raumes, der durch die zur Achse parallelen Geraden gefasert ist und dessen Grund- und Dachfläche, um einen rationalen Winkel $\frac{2\pi\nu}{\mu}$ verschraubt, zur Deckung gebracht sind. Aus den Faserinvarianten berechnet sich die Fundamentalgruppe der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit. Es zeigt sich, daß zwei faserbare Poincaré'sche Räume homöomorph sind, wenn sie dieselbe Fundamentalgruppe haben. Die von Herrn M. Dehn aus Torusknoten abgeleiteten Poincaré'schen Räume sind ebenso wie der von Poincaré angegebene faserbar; der letztere ist der einzige faserbare Poincaré'sche Raum endlicher Fundamentalgruppe. Er ist daher homöomorph dem Dehn'schen Kleeblattschlingenraum endlicher Fundamentalgruppe und dem sphärischen Dodekaederraum (vgl. Vortrag Threlfall). Die Hypersphäre ist der einzige faserbare Raum mit dem Einselement als Fundamentalgruppe; ihre sämtlichen Faserungen lassen sich aufzählen. — Wie die eben erwähnten Poin-

caré'schen Räume unabhängig von jeder Faserung definiert sind, so läßt sich auch folgender rein topologische Satz über Knotenüberlagerungen durch die Fasermethode gewinnen: Sind α_1, α_2, α_3, drei paarweise relativ prime Zahlen $\geqq 2$, so ist die α_3-fache zyklische Ueberlagerung des Torusknotens mit den Knoteninvarianten $m = \alpha_1$, $n = \alpha_2$ ein Poincaré'scher Raum; denselben Raum erhält man, wenn man α_1, α_2, α_3 ihre Rollen beliebig vertauschen läßt. — Eine notwendige, nicht immer erfüllte Bedingung für die Faserbarkeit eines Raumes besteht darin, daß die Fundamentalgruppe entweder aus dem Einselement allein besteht oder ein vom Einselement verschiedenes Element enthält, das von jedem anderen Element in sich selbst oder sein Reziprokes transformiert wird.

DREIDIMENSIONALE RAUMFORMEN

Von W. THRELFALL, Dresden

Die Methode, die in zwei Dimensionen zur Lösung des Homöomorphie-Problemes geschlossener Mannigfaltigkeiten geführt hat, nämlich die Konstruktion einer Normalform, versagt in drei und mehr Dimensionen. Nun tritt jede geschlossene Fläche als Diskontinuitätsbereich einer diskreten *fixpunktlosen* metrischen Bewegungsgruppe der Kugelfläche, der euklidischen oder der hyperbolischen Ebene auf. Entsprechendes gilt in drei Dimensionen nicht, vielmehr gibt es dreidimensionale geschlossene Räume, die sich weder mit einer sphärischen noch mit einer euklidischen oder hyperbolischen Metrik ausstatten lassen, z. B. das topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche. Dagegen liefern die Diskontinuitätsbereiche metrischer Bewegungsgruppen ein wichtiges Beispielmaterial dreidimensionaler Räume. Die sphärischen Diskontinuitätsbereiche und damit die geschlossenen Räume, die sich mit sphärischer Metrik ausstatten lassen, können vollständig ermittelt werden; die Diskontinuitätsbereiche fixpunkthaltiger sphärischer Bewegungsgruppen liefern dabei gegenüber denen fixpunktloser nichts Neues. — Die Frage, ob mit ihnen die geschlossenen Räume endlicher Fundamentalgruppe erschöpft sind, bleibt offen. Dagegen stimmt die Gesamtheit der faserbaren Räume endlicher Fundamentalgruppe (vgl. Vortrag Seifert) mit den Diskontinuitätsbereichen sphärischer Bewegungsgruppen überein. — Von besonderem Interesse sind unter den sphärischen Diskontinuitätsbereichen diejenigen der zyklischen Bewegungsgruppen, die „Linsenräume", da unter ihnen nichthomöomorphe Räume gleicher Fundamentalgruppe vorkommen. Zwei weitere Diskontinuitätsbereiche der Hypersphäre und zugleich sphärische Raumformen sind der Oktaederraum, der entsteht, wenn man in einem Oktaeder gegenüberliegende Dreiecke, um $\pi/3$ ver-

schraubt, einander zuordnet und der sphärische Dodekaederraum, zu dem sich das Dodekaeder schließt, wenn man gegenüberliegende Fünfecke, um $\pi/5$ verschraubt, identifiziert. Der letztere ist der einzige Poincaré'sche Raum, der unter den sphärischen Diskontinuitätsbereichen vorkommt. — Nicht so vollständig sind bisher die hyperbolischen Diskontinuitätsbereiche untersucht worden. Das einfachste Beispiel einer hyperbolischen Raumform ist (nach C. Weber) der hyperbolische Dodekaederraum, der aus dem Dodekaeder entsteht, wenn man gegenüberliegende Fünfecke, um $3\pi/5$ verschraubt, einander zuordnet. Während alle sphärischen Raumformen sich fasern lassen, sind alle geschlossenen hyperbolischen Raumformen unfaserbare Räume.

UNE SOLUTION DU PROBLÈME DES QUATRE COULEURS

Par JULES CHUARD, Lausanne

Soit donné un polyèdre convexe — une carte sur une sphère — dont les arêtes forment un réseau cubique qui satisfait aux conditions suivantes :

1) le réseau ne comprend pas d'isthme ;
2) deux faces contiguës n'ont en commun qu'une seule arête ;
3) les faces sont des polygones d'au moins quatre côtés.

L'on n'envisage que des arbres linéaires qui relient entre eux la totalité des sommets du polyèdre. Par rapport à ces arbres, les sommets sont de degré un, deux ou trois. Les sommets de degré trois sont nommés *bifurcations*. Un arbre qui ne renferme aucune bifurcation est un contour ouvert. Si les extrémités d'un tel contour ouvert limitent la même arête du réseau, ce contour est dit *contour V*, sinon il est dit *contour Z*.

Dans le Mémoire (N° 25, 1932) de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles intitulé : « *Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs* », il est établi que:

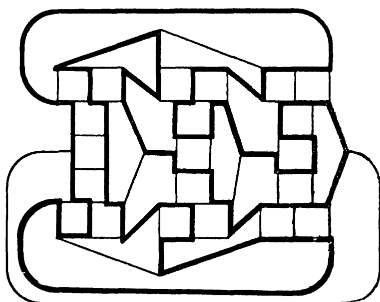
a) Il est possible de classer les différents arbres qui existent sur un réseau cubique donné d'après le nombre de leurs bifurcations.
b) Il est possible de transformer un arbre de k bifurcations en un arbre de $k-1$, éventuellement $k-2$ bifurcations.
c) Il est possible de passer d'un Z à un contour V.
d) L'existence d'un contour V assure celle d'un contour fermé unique — réseau quadratique d'une forme particulière — qui passe par tous les sommets du réseau cubique.

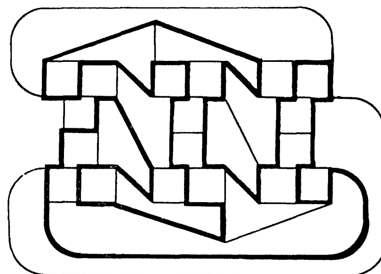
e) Ce réseau quadratique décompose le polyèdre en deux arbres superficiels tels que le coloriage de chacun d'eux n'exige que deux couleurs seulement.
f) Quatre couleurs sont donc suffisantes pour colorier une carte.

Ces propriétés résolvent le problème des quatre couleurs, dans un sens affirmatif, précisément dans le cas d'une carte qui appartient au *cas difficile,* soit d'une *carte normale* ou d'une *carte minima.*

On justifie ainsi la possibilité du coloriage tout en donnant un moyen de colorier.

Les exemples qui suivent, cités par M. Sainte-Lagüe dans le fascicule XLI du Mémorial des Sciences Mathématiques : *Géométrie de situation et jeux,* sont irréductibles en regard des méthodes d'investigation antérieurement connues. Ils sont résolus par cette méthode. Le trait renforcé indique un contour fermé unique qui passe par tous les sommets du réseau donné.

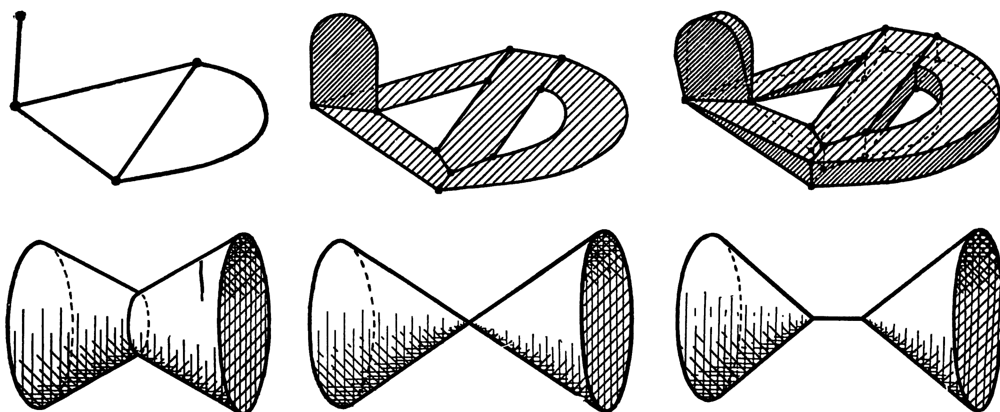

Fig. 1.


Fig. 2.

INVARIANZ DER TOPOLOGISCHEN WECHSELSUMME BEI DIMENSIONSÄNDERUNG

Von INGEBRIGT JOHANSSON, Oslo

Die Wechselsumme $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots\dots\dots \pm \alpha_p$ eines aus α_0 Punkten (E_0), α_1 Strecken (E_1), α_2 Elementarflächen (E_2), usw. aufgebauten topologischen Komplexes, ist bekanntlich eine Zerlegungsinvariante. Hier soll gezeigt werden, daß sie auch bei gewissen anderen sehr anschaulichen Aenderungen des Komplexes umgeändert bleibt. Hierfür geben die Figuren einige Beispiele. Ueber die Aenderungen in der untersten Reihe, die für mich den Ausgangspunkt gebildet haben, vgl. bei M. Dehn in Math. Ann. Bd. 71, S. 137.



Definition: *Wir sagen von einem Komplex C*

1. daß es eine **elementare Aufschwellung** *erleidet, wenn ein E_n so hinzugefügt wird, daß es mit C in E_{n-1} (und weiter nichts) gemeinsam erhält,*

2. daß es eine **elementare Einschrumpfung** *erleidet, wenn man ein E_n wegnimmt, das mit dem Rest ein E_{n-1} (und weiter nichts) gemeinsam hat, und*

3. daß es einer **Dimensionsänderung** *unterliegt, wenn mehrere elementare Aufschwellungen und Einschrumpfungen nacheinander folgen.*

Es sei nebenbei bemerkt, daß jede stetige Deformation (Homotopie) eines Komplexes innerhalb eines anderen zugleich eine Dimensionsänderung des ersten innerhalb des zweiten ist.

Satz: *Die Wechselsumme bleibt bei jeder Dimensionsänderung ungeändert.*

Beweis: Bei einer elementaren Aufschwellung kommt ein neues E_n hinzu, wodurch α_n um e i n s vergrößert wird. Von der Berandung dieses E_n gehört ein E_{n-1} dem gegebenen Komplex an; aber der Rest dieser Berandung, der auch ein E_{n-1} ist, kommt neu hinzu und vergrößert α_{n-1} um e i n s. Weitere Aenderungen in den α_i treten nicht auf; denn wir können ja voraussetzen, daß die gemeinsame Berandung der beiden erwähnten E_{n-1} schon in dem gegebenen Komplex eingezeichnet ist. Die Wechselsumme bleibt mithin bei jeder elementaren Aufschwellung ungeändert.

Dasselbe gilt natürlich auch bei jedem entgegengesetzten Prozeß, d. h. bei jeder elementaren Einschrumpfung, und folglich auch bei jeder Dimensionsänderung, w. z. b. w.

Ein anschaulicherer, aber weniger exakter Beweis ergibt sich aus einer Arbeit von G. Mannoury (Nieuw Archief voor Wiskunde 1897), wo erwähnt ist, daß die Wechselsumme durch die Bettischen Zahlen ausgedrückt werden kann, und daß die Bettischen Zahlen bei „contraction“ einzeln ungeändert bleiben. Diese Bemerkung verdanke ich D. v. Dantzig.

SUR DES COURBES FERMÉES ANALOGUES AUX COURBES DE M. BIRKHOFF

Par MARIE CHARPENTIER, Poitiers

M. Birkhoff a défini récemment[1]) des *„courbes remarquables"* douées des propriétés suivantes:

1° Une telle courbe est roulée vers la gauche par rapport à l'intérieur et à l'extérieur.

2° Elle est invariante par une transformation analytique T qui peut être choisie de façon à avancer les points accessibles de l'intérieur dans un sens et les points accessibles de l'extérieur dans le sens opposé.

I. L'étude des propriétés de ces courbes conduit à la construction d'une courbe qui jouit de propriétés analogues.

Sur un anneau de frontières C_1 et C_2 nous déterminons sur C_1, une transformation t_1: $\theta_1 = \varphi(\theta)$, φ continue, t_1 laisse invariant un ensemble parfait P de mesure a et tous les contigus à P sont les transformés de l'un (quelconque) d'entre eux par les puissances négatives ou positives de t_1, t_1 possède le coefficient de rotation τ_1 développable en fraction continue périodique. Nous déterminons sur C_2, t_2 avec un coefficient de rotation τ_2 de signe contraire.

Puis nous prolongeons la région intérieure à travers i_0, i_2, i_{-2} ... de C_1, la région extérieure à travers i_1, i_{-1}, i_3, ... de C_2 etc., chaque région partielle r_n occupe le $\frac{1}{7}$ de ce qui reste de l'anneau à l'étape précédente, est tournée à gauche et se termine à son intersection avec des droites qui font [sur C_1 p. ex.] un angle α avec la verticale:

$$\operatorname{tg} \alpha < \frac{a}{2A^3} \frac{1}{n} \left(\frac{7}{3}\right)^n \left(\frac{3}{7}\right)^3$$

$A = 2 +$ le maximum des quotients incomplets du développement de τ_1.

Quand n croit indéfiniment, l'anneau diminué les domaines ouverts r_n tend vers une courbe *fermée roulée à gauche.*

II. *On peut trouver une transformation continue de l'anneau laissant cette courbe invariante et douée du coefficient de rotation τ_1 pour les points accessibles de l'intérieur et du coefficient de rotation τ_2 pour les points accessibles de l'extérieur.*

---

1) M. *George D. Birkhoff*, Sur Quelques courbes fermées remarquables. Bullet. de la Soc. Math. de France. 1932. Tome LX. Fascicule I, II, p. 1.

On choisit une transformation continue:

$$r_{-1} = f(r_1),\ r_{-2} = f(r_0),\ \ldots$$

Soit H_1 la région comprise entre $r_0\, r_1\, r_{-1}$ et les diagonales unissant ces régions. Soit K_1 la région transformée. On peut définir T_1 comme une réunion de 41 transformations quadratiques transformant la partie de la courbe intérieure à H_1 en la partie de la courbe intérieure à K_1 et autrement arbitraire.

D'une façon générale T_n est une transformation continue de l'anneau en lui-même transformant H_n en K_n comme ci-dessus.

Pour définir T_n il faut définir: $(n^2 + 17\, n + 25)$ transformations.

On peut choisir un entier $N(\varepsilon)$ tel que pour $i,\ j > N$ on ait:

$$|\, X_i(x,\ y) - X_j(x,\ y)\,| < \varepsilon$$
$$|\, Y_i(x,\ y) - Y_j(x,\ y)\,| < \varepsilon$$

ε arbitraire pour tout point de l'anneau, les bords inclus.

Donc:

Les T_n convergent uniformément vers une transformation continue T qui laisse la courbe invariante et change r_n en r_{n-2} donc est douée des coefficients de rotation τ_1 et τ_2 par rapport à l'intérieur et à l'extérieur.

HÖHERDIMENSIONALE HOMOTOPIEGRUPPEN

Von E. ČECH, Brno

Sei a ein fester Punkt eines topologischen Raumes R; sei p eine natürliche Zahl. Sei G_p die Menge der a enthaltenden und in R gelegenen p-dimensionalen singulären Kugeln (= stetigen Bildern einer gewöhnlichen p-dim. Kugel); zwei Elemente von G_p werden als gleich betrachtet, wenn sie sich durch eine a festhaltende Homotopie in R ineinander überführen lassen. Es wird in G_p eine Multiplikation definiert, vermöge der G_p zu einer Gruppe wird. G_1 ist die klassische Wegegruppe Poincarés.

Geometrie

ÜBER STETIGE DEFORMATIONEN VON KOMPLEXEN

Von HEINZ HOPF, Zürich

(Bericht über eine gemeinsame Arbeit von Frl. E. PANNWITZ, Berlin, und dem Vortragenden) [1])

Ist f_t $(0 \leq t \leq 1)$ eine von dem Parameter t stetig abhängende Schar eindeutiger und stetiger Abbildungen des n-dimensionalen Komplexes C auf sich oder Teile von sich, wobei $f_0(x) = x$ für jeden *Punkt* $x \subset C$ und C_1 die durch f_1 gelieferte Bildmenge ist, so sagen wir, daß C in die Menge C_1 deformiert wird. Wir fragen: „Welche Komplexe lassen sich in echte Teile von sich deformieren?" Komplexe, für die das unmöglich ist, sollen *„im Großen stabil"* heißen. Leicht zu zeigen ist: „Ein Streckenkomplex ist dann und nur dann im Großen stabil, wenn er keine freie (d. h. auf nur einer Strecke gelegene) Ecke besitzt." Definieren wir weiter: *„C* heißt *‚im Kleinen stabil'* oder *‚labil'*, jenachdem es unmöglich oder möglich ist, ihn durch *beliebig kleine* Deformationen in echte Teile von sich zu deformieren", so gilt offenbar allgemein: „Besitzt C eine freie $(n-1)$-dimensionale Seite, so ist er labil." Dieser Satz ist jedoch, im Gegensatz zu dem obigen über Streckenkomplexe, für $n > 1$ nicht umkehrbar; vielmehr gilt: *„Für jedes $n \geq 2$ gibt es n-dimensionale Komplexe, die keine freie $(n-1)$-dimensionale Seite besitzen und doch labil sind."* Ein Beispiel eines derartigen Komplexes erhält man, indem man einen Meridian eines Torus auf einen Punkt zusammenschnürt und in einen Breitenkreis eine Kreisscheibe einspannt, die abgesehen von ihrem Rande zu dem Torus fremd ist. Die Stabilität im Kleinen ist natürlich für die Stabilität im Großen notwendig; sie ist bei Streckenkomplexen, wie aus dem obigen Satz hervorgeht, auch hinreichend; jedoch gilt: *„Für jedes $n \geq 2$ gibt es n-dimensionale Komplexe, die zwar im Kleinen, aber nicht im Großen stabil sind."* Hierfür erhält man ein Beispiel, wenn man an einem Torus in einen Meridian und in einen Breitenkreis je eine Kreisscheibe einspannt, so daß diese Scheiben mit dem Torus nur ihre Ränder, miteinander nur den Schnittpunkt ihrer Ränder gemeinsam haben.

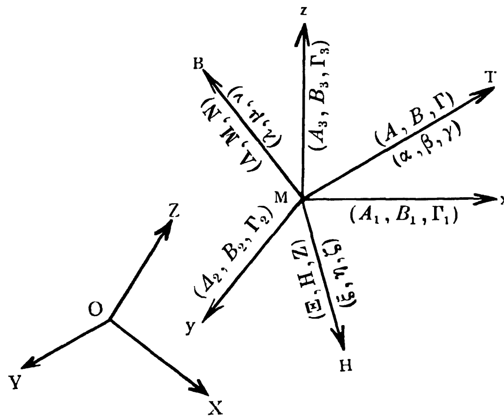
Die Aufgabe, die Stabilität im Großen und die im Kleinen durch kombinatorische Eigenschaften der Komplexe zu charakterisieren, können wir für die Stabilität im Großen nur für gewisse Klassen vom Komplexen, für die Stabilität im Kleinen aber vollständig lösen. Verstehen wir, wie üblich, unter dem „Umgebungskomplex"

[1]) Erscheint in den Mathematischen Annalen.

eines Eckpunktes e in dem n-dimensionalen Komplex C die Gesamtheit der $(n-1)$-dimensionalen Simplexe (einer festen Zerlegung von C), die auf den e enthaltenden n-dimensionalen Simplexen e gegenüberliegen, und nennen wir ferner einen r-dimensionalen Komplex „zyklisch", wenn in ihm jedes r-dimensionale Simplex einem Zyklus oder Zyklus mod. m (mit beliebigem $m > 1$) angehört, so gilt nämlich der folgende Satz: „*C ist dann und nur dann im Kleinen stabil, wenn die Umgebungskomplexe aller Ecken zyklisch sind.*"

BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN DREHUNGSKOMPONENTEN EINES BEWEGLICHEN ACHSENSYSTEMS UND DEN KRÜMMUNGEN DER BAHNKURVE DES BEWEGLICHEN ANFANGSPUNKTES

Von N. HATZIDAKIS, Athen



(Fig. 1)

Wenn (Fig. 1) die absoluten Kosinusse der beweglichen Achsen, der Reihe nach: A_1, B_1, Γ_1; A_2, B_2, Γ_2; A_3, B_3, Γ_3; die absoluten und die *relativen* (in bezug auf die beweglichen Achsen) des Hauptdreikantes der Bahnkurve des beweglichen An-

fangspunktes M, der Reihe nach: A, B, Γ; α, β, γ (der Tangente MT); Ξ, H, Z; ξ, η, ζ (der Hauptnormalen MH); Λ, M, N; λ, μ, ν (der Binormalen MB) bedeuten, so gelten die Gleichungen:

$$A_1 = A\alpha + \Xi\xi + \Lambda\lambda, \quad A_2 = A\beta + \Xi\eta + \Lambda\mu, \quad A_3 = A\gamma + \Xi\zeta + \Lambda\nu,$$
$$B_1 = B\alpha + H\xi + M\lambda, \quad B_2 = B\beta + H\eta + M\mu, \quad B_3 = B\gamma + H\zeta + M\nu,$$
$$\Gamma_1 = \Gamma\alpha + Z\xi + N\lambda, \quad \Gamma_2 = \Gamma\beta + Z\eta + N\mu, \quad \Gamma_3 = \Gamma\gamma + Z\zeta + N\nu.$$

Die Drehungskomponenten: $p = \Sigma A_3 A_2'$, $q = \Sigma A_1 A_3'$, $r = \Sigma A_2 A_1'$ (wo die Striche die Ableitungen nach der Zeit $t \equiv s$ (Bogen der Bahnkurve von M) bedeuten) nehmen also die Form an:

$$p = \Sigma(A\gamma + \Xi\zeta + \Lambda\nu).\left(A\beta' + \Xi\eta' + \Lambda\mu' + \frac{1}{P}(\beta\Xi - \eta A) + \frac{1}{R}(\mu\Xi - \eta\Lambda)\right) =$$
$$\gamma\beta' + \zeta\eta' + \nu\mu' + \frac{1}{P}(\beta\zeta - \gamma\eta) + \frac{1}{R}(\mu\zeta - \nu\eta) = (\gamma\beta' + \zeta\eta' + \nu\mu') + \frac{\lambda}{P} - \frac{\alpha}{R}.$$

Wir haben also die Beziehungen:

$$p = \frac{\lambda}{P} - \frac{\alpha}{R} + (\gamma\beta' + \zeta\eta' + \nu\mu'),$$
$$(1) \qquad q = \frac{\mu}{P} - \frac{\beta}{R} + (\alpha\gamma' + \xi\zeta' + \lambda\nu'),$$
$$r = \frac{\nu}{P} - \frac{\gamma}{R} + (\beta\alpha' + \eta\xi' + \mu\lambda'),$$

und die Geschwindigkeitskomponenten werden dadurch:

$$v_x = v_{Mx} + \left(\frac{\mu}{P} - \frac{\beta}{R} + \alpha\gamma' + \xi\zeta' + \lambda\nu'\right)z - \left(\frac{\nu}{P} - \frac{\gamma}{R} + \beta\alpha' + \eta\xi' + \mu\lambda'\right)y + x',$$
$$(2) \quad v_y = v_{My} + \left(\frac{\nu}{P} - \frac{\gamma}{R} + \beta\alpha' + \eta\xi' + \mu\lambda'\right)x - \left(\frac{\lambda}{P} - \frac{\alpha}{R} + \gamma\beta' + \zeta\eta' + \nu\mu'\right)z + y',$$
$$v_z = v_{Mz} + \left(\frac{\lambda}{P} - \frac{\alpha}{R} + \gamma\beta' + \zeta\eta' + \nu\mu'\right)y - \left(\frac{\mu}{P} - \frac{\beta}{R} + \alpha\gamma' + \xi\zeta' + \lambda\nu'\right)x + z'.$$

Die Gleichungen (1) und (2) enthalten als *Spezialfälle* nicht nur die bekannten kinematischen Formeln von *Darboux*, sondern auch andere allgemeinere, in der Theorie der Flächenkurven besonders nützliche Formeln, wie ich an anderem Ort ausführlich zeigen werde.

IL CONCETTO DI CONDIZIONE DI SCHUBERT NELLA CORRISPONDENZA A PIÙ INDICI

Di GIOVANNI GIAMBELLI, Messina

Menomio μ *di dimensione* v *imposto in* $[n]$ *ad una ipersuperficie* F *di* $[s]$ è (cfr. il § 4 della Nota dell'A. dell'Acc. Peloritana 1929) un prodotto di v condizioni $\mu_i(s)$ distinte, o no, essendo $\mu_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ la condizione semplice imposta alla F di avere un suo spazio $[s-i]$ tangente appartenente ad un dato $[n-i]$. Il prodotto di μ per una condizione caratteristica di dimensione $\sigma - v$ $(\geqq 0)$ imposta ad $[s]$ si dice *condizione caratteristica di dimensione* σ *per la* F *in* $[n]$ e si denota con $\gamma(F)$; la $\gamma(F)$ di dimensione massima è un *numero caratteristico per* F *in* $[n]$. La ricerca di questi numeri è *il problema delle caratteristiche della* F *in* $[n]$. La combinazione lineare di $\gamma(F)$ di dimensione σ equivalente ad una data condizione Γ di dimensione σ imposta alla F in $[n]$ si dice *espressione caratteristica di* Γ. Quindi segue la definizione dell'espressione caratteristica del prodotto $\gamma(F_1) \ldots \gamma(F_t)$ imposto ad un gruppo $g(F_i; h_i)_t$ di t ipersuperficie $F_1, \ldots, F_t$, essendo F_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$ ipersuperficie di $[k_i]$ appartenente ad $[h_i]$. Nello stesso § 4 si considera il Clebschiano $C(F_i; h_i)_t$ di gruppi $g(F_i; h_i)_t$. Se ∞^ρ sono i gruppi appartenenti al Clebschiano, si dicono suoi caratteri i numeri di gruppi appartenenti al Clebschiano, che soddisfano ad un prodotto $\gamma(F_1) \ldots \gamma(F_t)$ di dimensione ρ.

TEOREMA. *Il carattere imposto da* $\gamma(F_1) \ldots \gamma(F_t)$ *al Clebschiano* $C(F_i; h_i)_t$ *è uguale al prodotto di* $\gamma(F_1) \ldots \gamma(F_t)$ *per l'espressione caratteristica della condizione definita coll'imporre al gruppo* $g(F_i; h_i)$ *di appartenere al Clebschiano* $C(F_i; h_i)_t$.

Emerge l'importanza del concetto di condizione di SCHUBERT, poichè i caratteri del Clebschiano sono noti se si conoscono la detta espressione caratteristica e i detti numeri caratteristici. Applicazioni di questo risultato saranno poi fatte da P. BERTUCCELLI, A. LICATA, M. ROMEO. Il problema delle caratteristiche è però risolto in casi particolari: per le F_4 di [2] solo in [2], per le cubiche piane, gobbe in [3] (cfr. le belle ricerche di MAILLARD, ZEUTHEN, ecc. esposte dallo SCHUBERT nel *Kalkül* ecc.)

Il concetto di condizione di SCHUBERT si estende ad altri campi, p. es. agli spazi Hilbertiani del VITALI, nei quali le condizioni di dimensione massima possono essere numeri finiti, od infiniti. Si osservi che in molte ricerche geometriche del VITALI è ozioso introdurre le infinite coordinate, perchè *appartengono a spazi di un numero finito di dimensioni.*

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG VERSICHERUNGSMATHEMATIK UND STATISTIK

CURVE DI FREQUENZA NELLE ASSICURAZIONI DI INFORTUNI E DI RESPONSABILITÀ CIVILE

Di LUIGI AMOROSO, Roma

Nei rami elementari — incendi, infortuni, responsabilità civile, trasporti, ecc. — le tariffe non sono determinate razionalmente, in base a determinate ipotesi sulla frequenza del rischio, come avviene invece nel ramo vita, ma sono fissate *empiricamente,* in base ad una valutazione intuitiva ed individuale. Essa è affinata, corretta e controllata dalla concorrenza.

In linea teorica la concorrenza livella il prezzo al costo, quindi, nel caso presente, il premio al rischio. In pratica siffatto livellamento urta contro ostacoli ed attriti di diverso genere; tende a manifestarsi nella massa più che nei casi individuali. Ciò spiega come per lo stesso rischio si possono avere, da parte delle diverse Compagnie, tariffazioni che possono variare fino al rapporto da uno a due, a tre, a quattro.

Anche la valutazione delle riserve danni — cioè degli oneri latenti per sinistri avvenuti e non ancora liquidati — è attuata empiricamente, stanziando in bilancio una determinata aliquota dei premi come si fa per le riserve premi, corrispondenti ai rischi non ancora corsi, oppure valutando intuitivamente ad uno ad uno i singoli sinistri.

Le difficoltà che sussistono per l'introduzione nei rami elementari di metodi razionali si ricollegano ad un duplice ordine di fattori. Da una parte si ha una complessa, molteplice, sempre nuova varietà di rischi, che si presentano ora congiunti, ora separati, non sempre definibili ed accertabili con sicura precisione, ciascuno viceversa mostrando una fisionomia particolare ed esigendo una particolare tariffazione. Dall'altra viene meno l'invarianza, sia pure relativa, delle frequenze, si restringe la sfera della loro dipendenza da cause accidentali, mentre si allarga quella delle cause volontarie, la cui presenza ha formato in ogni tempo la spina ed il tormento degli assicuratori.

Gli studii iniziati da « Le Assicurazioni d'Italia », di cui un primo saggio è qui presentato al Congresso, tendono a creare lo strumento statistico atto a superare siffatte difficoltà pei ciò che concerne le riserve prima ancora che per le tariffe. Della collettività, di cui i singoli sinistri sono elementi, è stata rilevata la distribuzione delle singole frequenze per età, sia per ciò che si riferisce alle liquidazioni eseguite dalla Compagnia nel corso dell'anno 1931, sia per ciò che si referisce alle riserve stanziate in bilancio al 31 dicembre 1931, nel ramo infortuni ed in quello della responsabilità civile. Le quattro distribuzioni che ne risultano sono riportate nella

tavola I e rappresentate graficamente negli annessi diagrammi. Esse corrispondono, per ciascuno dei due rami, alle curve che in demografia esprimono rispettivamente la distribuzione dei morti e la distribuzione dei viventi per età.

Per una di esse, precisamente per la distribuzione per età dei sinistri liquidati nel ramo infortuni, è stata costruita, dal prof. *R. D'Addario*, una rappresentazione analitica col « *method of translation* » dello *Edgeworth*[1]).

Detta x la età, y la frequenza si è posto

$$P(x) = \int_x^0 y(t)\, dt$$

e si è calcolato

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z(x)} e^{-t^2}\, dt$$

ove

$$z(x) = 1{,}84.998 \; log \; x - 0{,}91.168$$

il simbolo *log* indicando logaritmi volgari.

La rappresentazione è perfetta: lo scarto tra i valori osservati ed i valori calcolati di $P(x)$ è circa 0,29 % come è indicato nella tavola II.

Limitandosi per il momento ai due rami qui indicati, le rilevazioni saranno estese alla massa del portafoglio (delle polizze) esistente.

Saranno proseguite nel futuro e per quanto è possibile ricostruite per il passato.

Tutto allo scopo di cercare nella massa delle distribuzioni eventuali invarianti rispetto al tempo. Solo siffatti invarianti possono costituire solido punto di partenza per la costruzione di una teoria razionale.

* * *

Le « Assicurazioni d'Italia » si permettono di presentare in questa sede il piano dei loro studii, nella fiducia che esso possa richiamare l'attenzione degli eminenti scienziati convenuti al Congresso. Esse accoglieranno con gratitudine le osservazioni ed i suggerimenti che potranno loro essere rivolti.

---

[1]) Detto metodo viene comunemente attribuito al KAPTEYN. Esso invece fu proposto in precedenza dallo EDGEWORTH, in *On the Representation of Statistics by Mathematical Formulae*, « Journal of the Royal Statistical Society », Dicembre 1898, pp. 670—700.

LE ASSICURAZIONI D'ITALIA

ESERCIZIO 1931

Tavola I

RAMI INFORTUNI E RESPONSABILITÀ CIVILE

DISTRIBUZIONI PER ETÀ DEI SINISTRI LIQUIDATI E DEI SINISTRI IN RESERVA [1]

ETÀ (in mesi)	Sinistri liquidati nell'esercizio				Sinistri in riserva alla fine dell'esercizio			
	Infortuni		Responsabilità civile		Infortuni		Responsabilità civile	
	Numero	Importo [2]	Numero	Importo [2]	Numero	Importo [3]	Numero	Importo [3]
meno di 3 . . .	2.678	534.811.64	703	258.000	770	523.600	485	929 200
da 3 a 6 . . .	1.590	858.118,60	1.052	437.500	282	333 550	314	815 680
„ 6 „ 9 . . .	612	504 431,95	927	344 068	123	167 700	171	850.600
„ 9 „ 12 . . .	242	297.866,10	531	257 403	70	59.400	95	200 800
„ 12 „ 15 . . .	158	175 056,50	388	166.286	49	133 500	94	339.650
„ 15 „ 18 . . .	82	146.839.50	178	216 786	29	49 800	95	429.400
„ 18 „ 21 . . .	44	32.787.25	154	272.827	19	556.350	73	516 900
„ 21 „ 24 . . .	41	54.272,65	81	67.620	12	53.000	43	492.150
oltre . 24 . . .	44	127.190,80	159	471.758	23	136.850	141	1.362.050
Totali . . .	**5.491**	**2.731.374,99**	**4.173**	**2.492.248**	**1.377**	**2.013.750**	**1.511**	**5.936.430**

Età media dei sinistri liquidati:

a) assumendo il *numero* come peso:

Infortuni . . . . mesi 4,65

Responsabilità civile . . . . mesi 8,82

b) assumendo l'*importo* come peso:

Infortuni . . . . mesi 8.57

Responsabilità civile . . . . mesi 14,32

Età media dei sinistri in riserva:

a) assumendo il *numero* come peso:

Infortuni . . . . mesi 4.54

Responsabilità civile . . . . mesi 9,67

b) assumendo l'*importo* come peso:

Infortuni . . . . mesi 11,65

Responsabilità civile . . . . mesi 16,45

[1] Per *età del sinistro all'atto della liquidazione* s'intende l'intervallo di tempo che corre tra la data della denunzia e la data della liquidazione.
Per *età del sinistro in riserva* s'intende l'intervallo di tempo che corre tra la data della denunzia e la data di chiusura del esercizio al 31 dicembre 1931.

[2] Al netto del spese. [3] Preventivato

LE ASSICURAZIONI D'ITALIA

ESERCIZIO 1931 — RAMO INFORTUNI

Tavola II

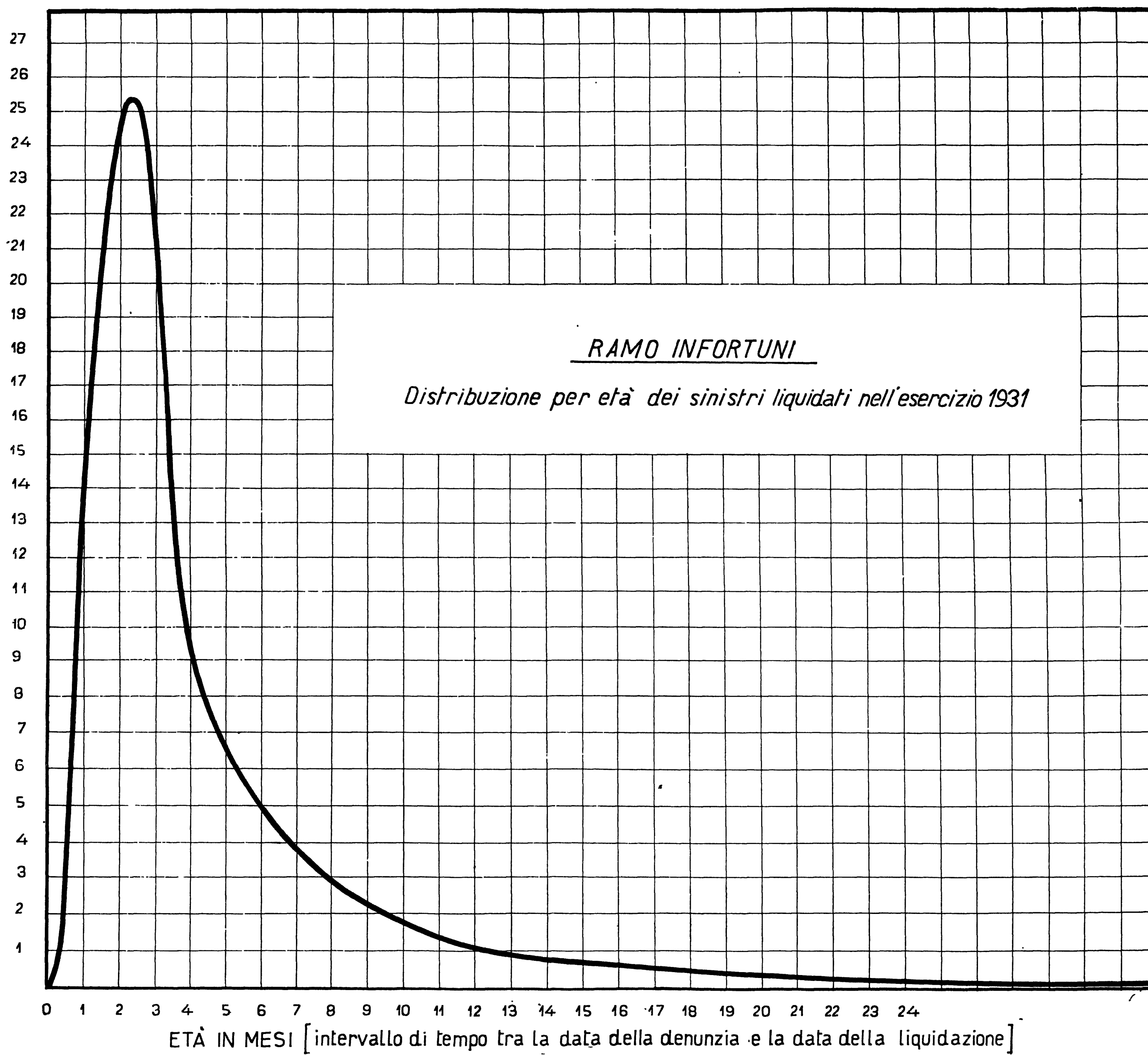
RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DELLA CURVA DI DISTRIBUZIONE DEI SINISTRI LIQUIDATI

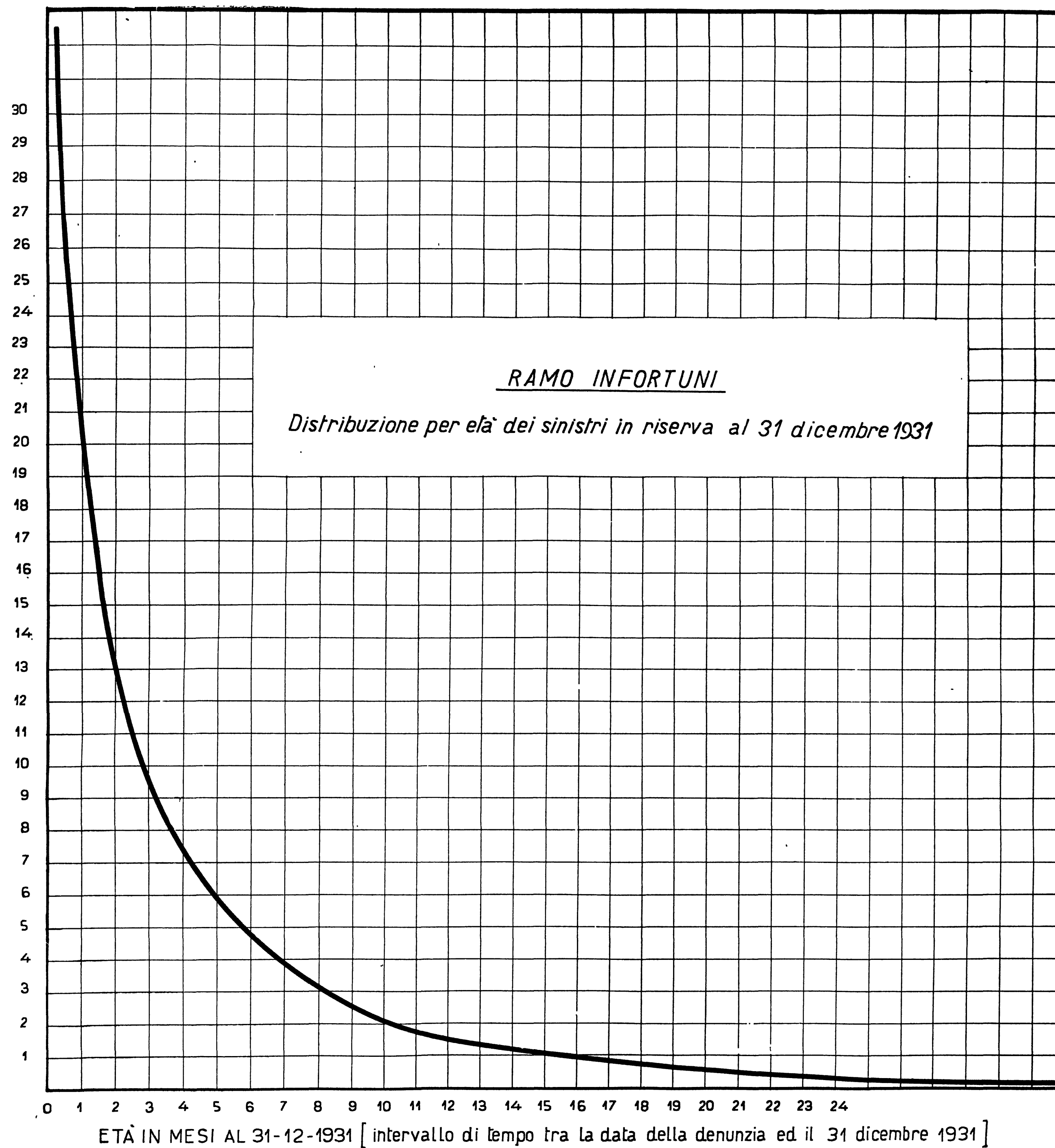
x	$\log x$	$z(x)$	$P(x)$		Scarti tra i valori osservati ed i valori calcolati	
			Valori calcolati	Valori osservati	+	—
3	0,47.712	— 0,029	0,484	0,488	0,004	
6	0,77.815	+ 0,528	0,772	0,777	0,005	
9	0,95.424	+ 0,854	0,886	0,888	0,002	
12	1,07.918	+ 1,085	0,937	0,932		0,005
15	1,17.609	+ 1,264	0,963	0,960		0,003
18	1,25.527	+ 1,410	0,977	0,976		0,001
21	1,32.222	+ 1,534	0,985	0,984		0,001
24	1,38.021	+ 1,642	0,990	0,992	0,002	
∞	∞	∞	1,000	1,000		
			7,994	7,997	0,013	0,010

$$z(x) = 1{,}84.998 \log x - 0{,}91.168$$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z(x)} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \theta\,[z(x)] \right\}$$

$$\text{Scarto medio } \frac{13 + 10}{7997} = 0{,}0029$$


RAMO INFORTUNI
Distribuzione per età dei sinistri liquidati nell'esercizio 1931
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
ETÀ IN MESI [intervallo di tempo tra la data della denunzia e la data della liquidazione]
Vale n.54,91 sinistri



RAMO INFORTUNI
Distribuzione per età dei sinistri in riserva al 31 dicembre 1931
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
ETÀ IN MESI AL 31-12-1931 [intervallo di tempo tra la data della denunzia ed il 31 dicembre 1931]

RAMO RESPONSABILITÀ CIVILE

Distribuzione per età dei sinistri liquidati nell'esercizio 1931

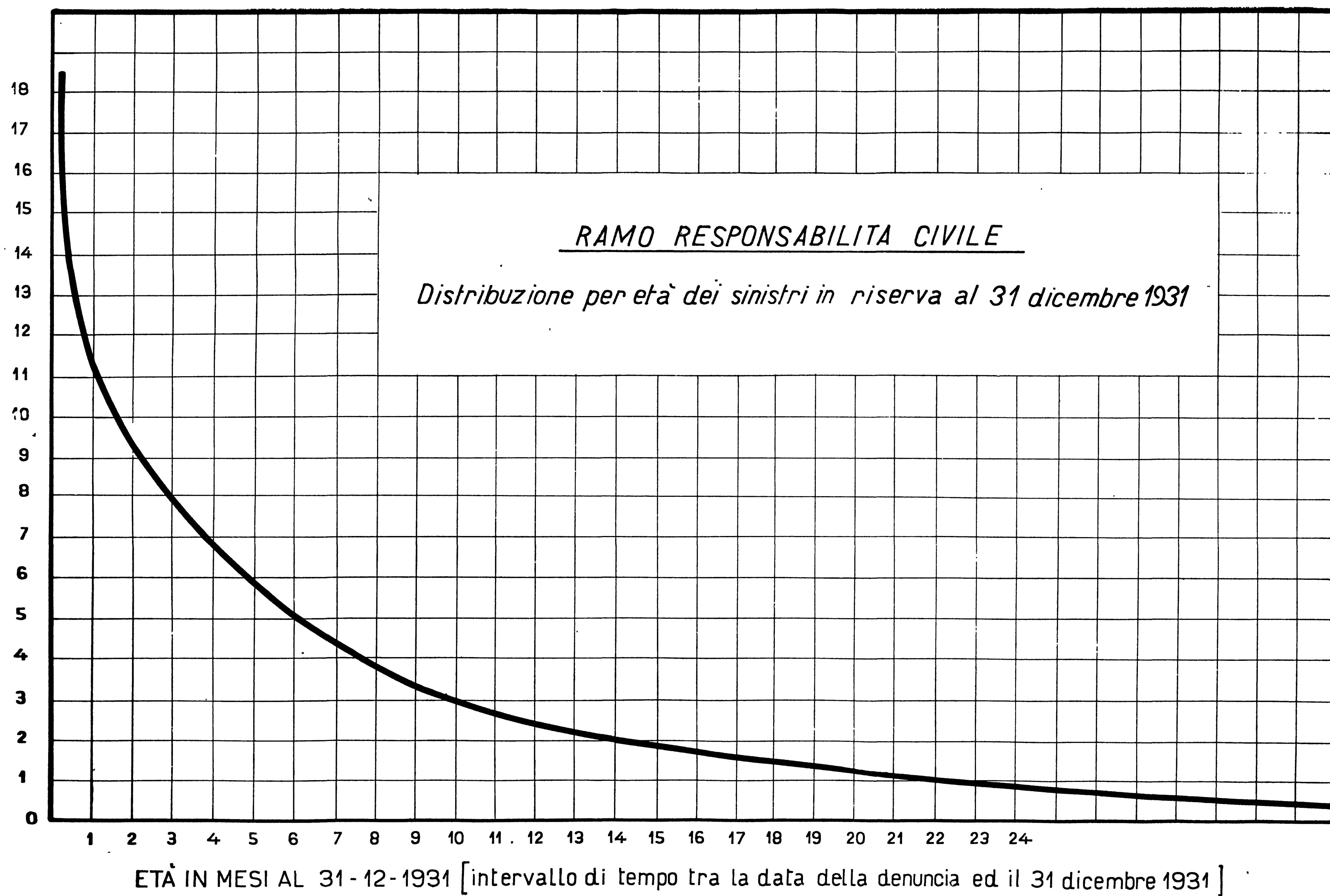
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

ETÀ IN MESI [intervallo di tempo tra la data della denunzia e la data della liquidazione]



Vale n. 41,73 sinistri


RAMO RESPONSABILITA CIVILE
Distribuzione per età dei sinistri in riserva al 31 dicembre 1931
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
ETÀ IN MESI AL 31-12-1931 [intervallo di tempo tra la data della denuncia ed il 31 dicembre 1931]
Vale n.15,11 sinistri

WAS FOLGT AUS DEM MISES'SCHEN WAHRSCHEINLICHKEITSBEGRIFF FÜR DIE VERSICHERUNGSMATHEMATIK?

Von P. RIEBESELL, Hamburg

In einem Vortrag in der Vereinigung schwedischer Lebensversicherungsmathematiker [1]) hat Englund die Behauptung aufgestellt, daß der Begriff Wahrscheinlichkeit aus der Versicherungsmathematik entfernt werden müsse. Ferner seien die Lehren von der Gerechtigkeit der Kostenverteilung und der Gewinnverteilung, sowie die Lehre von der individuellen Prämienreserve Irrlehren. Bei der Negierung des Begriffs der Wahrscheinlichkeit hat sich Englund auch auf die Mises'sche Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs berufen. Diese Berufung ist unzulässig. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit in einem Kollektiv führt allerdings dazu, sowohl in der Lebensversicherungsmathematik als auch in der Sachversicherungsmathematik die Begriffe Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit voneinander zu trennen. Die Untersuchung der Frage, ob es sich bei einem Versicherungsbestand um einen endlichen Abschnitt eines echten Kollektivs handelt, ist aber eine typische Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Frage nach der Gerechtigkeit der Kostenverteilung und der Gewinnverteilung, nach der Berechnung der richtigen Prämie und der individuellen Prämienreserve sind Fragen nach der Beschaffenheit der Kollektive, in die die einzelne Versicherung einzureihen ist. Als gerecht muß diejenige Lastenverteilung angesehen werden, die unter Benutzung aller für die Einzelversicherung in Frage kommenden Umstände die aus der Erfahrung abgeleiteten Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten behandelt und die sich für das Kollektiv ergebende Bilanz als typischen Fall der Einzelbilanz ansieht. Dabei ist allerdings überall zu prüfen, ob es sich in der Praxis um echte Kollektive handelt und welche Abweichungen in der Häufigkeitsverteilung von echten Kollektiven vorhanden sind. Bei der Gewinnverteilung sind Methoden, die ein zufälliges a posteriori-Ergebnis zu einer Korrektur des angenommenen a priori-Ergebnisses benutzen, abzulehnen.

[1]) Vgl. Oesterreichische Revue 1932, Nr. 15—19.

ENTKRANKUNGSKRAFT UND BESSEL'SCHE FUNKTIONEN

Von CHR. MOSER, Bern

Der zeitliche Verlauf sehr vieler Krankheitsfälle möge als Massenerscheinung beobachtet worden sein. Man ordne die Fälle nach ihrer Dauer. Es sei $f(t)$ die Zahl der Fälle, die nach der Dauer t seit dem Beginne der Krankheit noch bestehen. Die ganze Gesamtheit wird also $f(0)$ sein. Sie wird nach und nach, durch Tod oder Gesundwerden, also durch Entkrankung, abnehmen. Um diese Abnahme mathematisch zu erfassen, gehen wir nach der kontinuierlichen Methode vor. Dabei bezeichnen wir für einen Grenzwert dt die Abnahme, bezogen auf den Größenbetrag 1 und die Zeit 1, als *Entkrankungsintensität* oder Entkrankungskraft $\mu(t)$ und definieren:

$$(1) \qquad \mu(t) = \frac{f(t) - f(t + dt)}{f(t)} \cdot \frac{1}{dt} = \frac{d}{dt}\, ln\left(\frac{1}{f(t)}\right).$$

Beobachtungen, z. B. bei der Krankenkasse für den Kanton Bern und bei der Schweizerischen Unfallversicherungsanstalt in Luzern, sowie auch theoretische Ueberlegungen haben dazu geführt, $\mu(t)$ als aus zwei Komponenten bestehend anzusehen[1]), von denen die eine konstant ist und die andere sich umgekehrt proportional dem Quadrate einer Zeitdauer verhält:

$$(2) \qquad \mu(t) = a + \frac{b}{(c + t)^2}, \text{ wo } a \geq 0,\ b \geq 0,\ c > 0.$$

Interessant ist nun die Krankenordnung $f(t)$, da ihre Kenntnis, sowie die des *Integrals* $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt$ eine Anzahl von Aufgaben übersichtlich und elegant lösen läßt. Gemäß (1) findet man für $f(t)$ allgemein $k\, e^{-\int \mu(t)\, dt}$, wenn k einer Integrationskonstanten entspricht. Mithin wird, unter Berücksichtigung von (2):

$$(3) \qquad f(t) = k\, e^{-at} \cdot e^{\frac{b}{c+t}}.$$

[1]) Vgl. Mitt. d. Verf. am III. intern. Aktuarkongress, Paris 1900. Ferner. *K. Böschenstein*, Zeitschr. f. schweiz. Statistik, Bern 1907 und *W. Thalmann*, Jahrbuch d. phil. Fak. II d. Univers. Bern, 1921.

Man kann $f(t)$, als einer Art Pendant zur *Makcham'schen Funktion,* auch die Form $k\, s^t\, g^{\frac{1}{c+t}}$ geben, wo $e^a = s$ und $e^b = g$ sind.

Gelten die Abkürzungen: $y = 2\sqrt{ab}$ und $z = (c+t)\sqrt{\frac{a}{b}}$, so erhält man aus (3):

$$f(t) = k\, e^{ac} \,.\, e^{-\frac{y}{2} z} \,.\, e^{\frac{y}{2} \cdot \frac{1}{z}}. \tag{4}$$

Durch Reihenentwicklung der beiden mit z behafteten Exponentialfunktionen und Vornahme der Multiplikationen folgt aus (4):

$$f(t) = k\, e^{ac} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\overset{n}{\mathcal{J}}_{(y)}}{z^n}. \tag{5}$$

Man wird also in recht einfacher Weise auf *Bessel'sche* [1]) *Funktionen* $\overset{n}{\mathcal{J}}_{(y)}$ geführt, wobei, wie aus der Multiplikation der Reihen hervorgeht, man hat:

$$\overset{n}{\mathcal{J}}_{(y)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!\,(n+\lambda)!} \left(\frac{y}{2}\right)^{n+2\lambda} \text{ und } \overset{-n}{\mathcal{J}}_{(y)} = (-1)^n\, \overset{n}{\mathcal{J}}_{(y)}.$$

LES PROBLÈMES MATHÉMATIQUES DANS L'ASSURANCE SUR LA VIE ET LES PROBLÈMES FINANCIERS

Par ALEXANDRE IVANOFF, Sofia

L'assurance s'est développée plus qu'on ne s'y attendait. Elle jouit aujourd'hui de la confiance générale et constitue une nécessité essentielle pour le monde civilisé. A quoi est dû ce succès de l'assurance ? Sans doute aux grands services que les mathématiciens lui ont rendus. Grâce au travail systématique séculaire, beaucoup de

[1]) *F. W. Bessel,* Abh. Bd. 1, herausgegeb. von *Engelmann,* Leipzig 1875 und *F. Tisserand,* Traité de Méc. céleste, t. 1, Paris 1889.

questions dans l'assurance sur la vie ont trouvé leur solution, en y apportant une répartition plus juste dans les prestations des assurés. Des questions qui paraissaient aléatoires à prime abord, les mathématiciens ont trouvé leur solution rationnelle.

Mais ce succès de la mathématique d'assurances est dû surtout au fait que la vie financière du monde dans le passé était plus stable et l'échange international — plus restreint.

Comme par exemple, presque jusqu'à la fin de 1890 le prix du blé était plus ferme que celui de l'or, comme métal.

Aujourd'hui nous constatons une grande différence : des progrès techniques très grands, des échanges commerciaux excessivement développés. Tout se transforme d'une manière si vertigineuse, qu'il est difficile de faire une comparaison avec le passé. Les modifications survenues sont telles dans certains pays que nous voyons déjà des colosses financiers, quoique résultat d'un travail systématique séculaire, telles les entreprises d'assurances, fléchir sous les conditions économiques actuelles.

Dans cette perturbation financière, le service rendu à l'assurance par les mathématiciens devient aléatoire — les problèmes financiers, par contre, acquièrent une importance prépondérante. S'ils ne trouvent pas de solution, l'assurance perdra l'importance qu'elle avait jusqu'à présent.

Ici aussi la participation de la mathématique à la solution des problèmes financiers est de rigueur. Deux questions principales doivent trouver leur solution.

1^0^ Suppression de la différence dans le change, créée après la grande guerre et qui est un obstacle pour l'échange international.

2^0^ Création d'une monnaie pouvant répondre aux besoins d'aujourd'hui et de demain et comprenant en elle-même une certaine part de l'épargne populaire adaptable à tous les changements de la vie économique et correspondant toujours au coût de la vie.

La dynamique de la vie économique doit être bien étudiée et les monnaies dont le monde civilisé se sert aujourd'hui, doivent être complètement modifiées. en envisageant, en premier lieu, la création d'une monnaie unique, internationale, dont les qualités correspondent à la dynamique de la vie économique.

Voilà une question qui s'impose aux esprits disciplinés et profonds des mathématiciens et qui attend sa solution.

SUR DES NOUVELLES FONCTIONS DE SURVIE DES DIVERS ORDRES, AU SENS DE QUIQUET

Par FILADELFO INSOLERA, Turin

On sait que si le taux instantané de mortalité μ_x satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre $i + 1$ à coefficients constants et sans second membre

$$a_i \, \mu_x^{(i+1)} + a_{i-1} \, \mu_x^{(i)} + \ldots + a_0 \, \mu'_x = 0, \tag{1}$$

la correspondante fonction l_x de survie est de l'ordre i, au sens de Quiquet[1].

Or, puisque rien n'empèche, au point de vue analytique, de considérer, au lieu de la relation (1), la relation

$$a_i \, \mu_z^{(i+1)} + a_{i-1} \, \mu_z^{(i)} + \ldots + a_0 \, \mu'_z = 0, \tag{1'}$$

étant z une fonction dérivable de x, la question se pose de savoir si et sous quelles conditions la relation (1') jouit de la même propriété démographique dont nous disions tout à l'heure pour la relation (1). Il est de toute évidence que, lorsque cela a lieu, les intégrales de ces équations différentielles à coefficients variables, lesquelles, par une convenable substitution $z = z(x)$, se ramènent à la forme (1'), dénoncent l'existence de nouvelles fonctions de survie des divers ordres, au sens de Quiquet.

Cette communication donne une particulière réponse favorable à la question. Considérons, en effet, l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables

$$\mu''_x - \frac{(k-1)}{x - x_0} \mu'_x = 0, \tag{2}$$

où k est une constante, que l'expérience démontre plus grande que 1, et x_0 est la plus petite des valeurs de x, dans un convenable champ de variabilité de l'âge x.

Par la position $\mu'_x = y_x$ et la substitution

$$z = \log (x - x_0) \tag{3}$$

l'équation (2) se ramène, notoirement, à

$$y'_z - (k-1) \, y_z = 0 \tag{4}$$

---

[1]) *A. Quiquet,* Sur la représentation algébrique des tables de survie, Bull. de l'Institut des Actuaires Français, 1893. n. 14.

tout à fait semblable à la relation (1'), lorsque on y pose $i = 1$ et $y_z = \mu'_z$. Or, l'intégrale de l'équation (4) est $y_z = C e^{(k-1)z}$, avec C constante à déterminer. Il s'ensuit $\mu_z = \frac{C}{k-1} e^{(k-1)z} + C_1$, ou bien

$$(5) \qquad \mu_x = \mu_{x_0} + h\,(x - x_0)^k \qquad \left(h = \frac{C}{k}\right).$$

suivant qu'on intègre par rapport à z ou à x.

La relation (5) exprime une propriété effective du taux instantané, autrefois établie par voie empirique[1]). Evidemment alors la correspondante fonction de survie, avec la substitution (3), jouit de la propriété makehamienne, c'est-à-dire qu'elle est du premier ordre, au sens de Quiquet.

On conclut, donc, que l'équation (2) satisfait à la même condition démographique remplie par la relation (1) pour $i = 1$.

Plus en général, si l'on considère l'équation

$$(6) \qquad \mu_x^{(i+1)} - \frac{k-i}{x-x_0}\,\mu_x^{(i)} = 0,$$

avec i plus grand que 1, par la position $u_x = \mu_x^{(i)}$ et la substitution (3), on peut la ramener à

$$(7) \qquad u'_z - (k-i)\,u_z = 0,$$

tout à fait analogue à la relation (4). On retombe, donc, dans le cas précédent. Sans de difficulté, alors, on peut montrer que, au taux instantané

$$\mu_x = \mu_{x_0} + \sum_{1}^{i-1}{}_s\, C_s \frac{(x-x_0)^{i-s}}{(i-s)!} + C\,\frac{(k-1)!}{(k-i+1)!}\,(x-x_0)^k,$$

qui est l'intégrale de l'intégrale générale de l'équation (6), correspond une fonction de z, avec la substitution (3), de survie de l'ordre i, au sens de Quiquet.

---

1) *F. Insolera,* Di una funzione di sopravvivenza, Giornale di Matem. Finanziaria, n. 4—6, 1930.

FRAGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG

Von R. v. MISES, Berlin

Das Referat über Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Wr.), das ich auf Wunsch der Kongreßleitung erstatte, will ich wie folgt gliedern: I. Zunächst hebe ich einige Gesichtspunkte der neueren Wahrscheinlichkeitstheorie hervor, die sich, soweit ich sehe, heute ziemlich allgemein durchgesetzt haben. II. Sodann bespreche ich eine Reihe neuerer Arbeiten, die sich mit Einzelproblemen befassen, und zeige, wie sie sich den unter I. genannten Gesichtspunkten unterordnen. III. Schließlich komme ich auf die strittigen Fragen der Theorie, vor allem das Regellosigkeitsaxiom, und die Versuche ihrer Fortbildung zu sprechen.

I.

Folgende Gesichtspunkte, die die von mir seit etwa fünfzehn Jahren entwickelte Wahrscheinlichkeitstheorie in den Vordergrund gerückt hat, scheinen mir im großen und ganzen heute ziemlich allgemein anerkannt zu sein: 1. Die Voranstellung des Begriffs „Kollektiv" vor den der „Wahrscheinlichkeit", 2. das Operieren mit dem allgemeinen „Verteilungs"-begriff, 3. die klare Beschränkung der Aufgabe der Wr. auf Aufsuchung von Beziehungen zwischen Verteilungen.

Zu 1. genügt es, darauf hinzuweisen, daß es etwa eine zahlenmäßig angebbare Lebens- oder Sterbenswahrscheinlichkeit für ein *Individuum* nicht gibt, sondern nur für irgendwelche *Klassen* von Individuen, z. B. die 40jährigen Männer Europas oder die 40jährigen Männer und Frauen Italiens. Da ein und dasselbe Individuum verschiedenen Klassen angehört, sind ihm gleichberechtigt verschiedene Sterbenswahrscheinlichkeiten zugeordnet. Ueberall, wo von einer zahlenmäßigen Wahrscheinlichkeit dieRede ist, muß vorher die Klasse von Erscheinungen oder Beobachtungen definiert sein, auf die sie sich bezieht. Daß in einer Lotterie mit einer Million Losen das Herauskommen des Loses mit der Nummer 400000 *unwahrscheinlicher* ist als das eines anderen, ist unrichtig, wenn das betrachtete Kollektiv zum Element die Ziehung eines beliebigen Loses mit seiner Nummer als Merkmal besitzt; es ist aber richtig innerhalb des Kollektivs, dessen Element die Ziehung eines Loses mit der *Anzahl der Endnullen* als Merkmal ist. Nicht dem individuellen Ereignis, hier dem Ziehen des Loses, sondern der Klasse, dem Rahmen, innerhalb dessen es betrachtet wird, kommt eine Wahrscheinlichkeit zu. Herr M. *Fréchet* [1]) hat versucht, dem hier

[1]) *M. Fréchet,* «Sur la convergence ‚en probabilité'». Metron VIII, 1930. No. 4.

auftretenden Bedürfnis durch die Einführung des Begriffs « défini sur la même catégorie d'épreuves » Rechnung zu tragen. In dem zweiten der eben gegebenen Beispiele reicht diese Formulierung nur dann aus, wenn man sie in dem Sinne meiner Auffassung des Kollektivs dahin ergänzt, daß das Element ein unbeschränkt wiederholbarer Beobachtungsvorgang (épreuve) ist, der mit der *Feststellung eines wohldefinierten Merkmals abschließt* (der Nummer des Loses oder der Zahl der Endnullen). An sich gehören zu derselben Folge von Beobachtungen noch verschiedene Kollektivs, die etwa durch verschiedene Zusammenfassungen von Merkmalgruppen zu einem neuen Merkmal gebildet werden.

Als zweiten wesentlichen Punkt, der die neue Theorie von der älteren unterscheidet, betrachte ich es, daß die letztere vorwiegend ihre Sätze an der einfachen Alternative „ob ein Ereignis eintritt oder nicht" entwickelte, von da zu etwas allgemeineren, unstetigen Wahrscheinlichkeiten vordrang und bei der Behandlung sogenannter geometrischer Wahrscheinlichkeiten schon meist scheiterte. Demgegenüber gehen wir jetzt grundsätzlich aus von einer *Verteilungsfunktion* W, die etwa im Falle eines Kollektivs mit dreidimensionalen Merkmalen bedeutet: $W(x, y, z)$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die erste Merkmalkomponente höchstens gleich x, die zweite höchstens gleich y, die dritte höchstens gleich z ist. Für eine Punktmenge A des Merkmalraumes, für die das Stieltjesintegral

$$W_A = \int_{(A)} dW\,(x, y, z) \tag{1}$$

existiert, bedeutet dieses W_A die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Merkmalwert nach A fällt. In dieser Auffassung sind alle Fälle, die der Alternative, der allgemeinen arithmetischen Wahrscheinlichkeiten sowie der geometrischen, eingeschlossen. Andererseits halte ich es nicht für das Wesentliche in der Wahrscheinlichkeitstheorie, zum mindesten im heutigen Stadium ihrer Entwicklung, die Aufmerksamkeit auf möglichst *pathologische Formen* der Funktion W und der Punktmenge A zu richten. Die Verwendung der Verteilungsfunktion soll vielmehr darin bestehen, daß sie die verschiedenen praktisch auftretenden Fälle einheitlich zu behandeln gestattet. Weiter stellt diese Betrachtungsweise die Rolle der Gleichverteilung oder der „gleichmöglichen Fälle" ins rechte Licht. Man kann, zumindest bei stetigen Variablen, jede beliebige vorgegebene Verteilung durch entsprechende Aenderung des Koordinatensystems in eine Gleichverteilung überführen. Diese ist also nicht prinzipiell ausgezeichnet, wenn sie auch in vielen Fällen rechnerische Vorteile bietet. Die Paradoxien der klassischen Theorie, die man mit dem sogenannten Bertrandschen Problem in Verbindung zu bringen pflegt, lösen sich hier von selbst auf.

Schließlich kann man wohl sagen, daß sich die Erkenntnis durchgesetzt hat, die Wr. könne nichts anderes leisten, als aus gegebenen Verteilungen andere, davon abhängige Verteilungen zu berechnen oder, anders ausgedrückt, *Beziehungen zwischen den Verteilungen* verschiedener Kollektivs festzustellen. Nicht, ob die sechs Seiten eines Würfels gleichwahrscheinlich sind, sondern was aus der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit bezw. aus der Annahme einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilung der sechs Würfelseiten folgt, z. B. hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit, hintereinander zweimal 6 zu werfen, das zu beantworten, ist eine Aufgabe der Wr. Dabei kann es natürlich vorkommen, daß praktisch gerade die Feststellung der in die Rechnung eingehenden Ausgangsverteilungen große Schwierigkeiten bereitet. Das ist aber auch nicht anders etwa in der Mechanik, die lehrt, welche Bewegungen aus gegebenen Kräften folgen, in der es aber oft auch zunächst schwierig sein kann, die in einem bestimmten Fall wirkenden Kräfte festzustellen.

II.

Eine Gruppe von Arbeiten [1]), unter denen die schon angeführte von M. Fréchet hervorragt, beschäftigt sich mit dem von *Cantelli* [2]) eingeführten Begriff der variables aléatoires und der convergence en probabilité. Bekanntlich hat man es beim Bernoullischen Problem, indem man aus einer Folge von Alternativ-Versuchen je n als Element eines Kollektivs zusammenfaßt, mit einer unendlichen Folge von Verteilungen $W_n(z)$ zu tun, die mit wachsendem n gegen die Verteilung konvergieren, die nur eine einzige Sprungstelle bei $z = p$ besitzt. Nachdem Herr Cantelli diesen Tatbestand mit den Worten umschrieben hat „die Zufallsvariable z konvergiere im Sinne der Wr. gegen die Konstante p“, stellte sich Herr Fréchet die Frage, ob man nicht im analogen Sinne von einer Konvergenz einer Zufallsvariablen x gegen eine andere Zufallsvariable y sprechen kann. Dies ist offenbar in dem Sinne möglich, daß man von einer unendlichen Folge zweidimensionaler Verteilungen $W_n(x, y)$ ausgeht, für die

$$W_{n,A} = \int_{(A)} d W_n(x, y) \tag{2}$$

mit wachsendem n gegen Null konvergiert, sobald *A keinen* Punkt der Geraden $x = y$ enthält. Es wird dann bei genügend großem n „fast sicher“, daß x nahe an y liegt. Herr Fréchet behandelt von vornherein nur gewisse Spezialfälle, die auf Fragen füh-

---

1) s. Fußnote S. 221.

2) *F. P. Cantelli,* La tendenza ad un limite nel senso del Calcolo delle Probabilità. R. *C.*, Palermo, t. XLI, 1916, p. 191—201.

ren, die vom Standpunkt der Theorie der reellen Funktionen Interesse haben. Man kann z. B. eine von n unabhängige eindimensionale Verteilung $V(\xi)$ und eine Funktionenfolge $f_n(\xi)$, endlich eine Funktion $f(\xi)$ betrachten. Nennt man dann $B_{n,x,y}$ die Punktmenge, für die $f_n(\xi) \le x$ und $f(\xi) \le y$ ist, so hat man in

$$W_n(x, y) = \int_{(B_{n,x,y})} dV(\xi) \tag{3}$$

eine Folge zweidimensionaler Verteilungen, die man der angedeuteten Betrachtung unterwerfen kann. Es zeigt sich — dies ein Beispiel der Fréchetschen Ergebnisse —, daß die Konvergenz von x gegen y „im Sinne der Wahrscheinlichkeit" sich mit der Konvergenz von $f_n(\xi)$ gegen $f(\xi)$ im gewöhnlichen Sinne überschneidet. Solche Fragestellungen können für spezielle Aufgaben der Wr. von Bedeutung werden, die Grundlagen berühren sie keineswegs. Ob es besonders zweckmäßig ist, eine Ausdrucksweise beizubehalten, bei der Eigenschaften von Funktionen als Eigenschaften der unabhängigen Veränderlichen bezeichnet werden, mag dahingestellt bleiben.

Als eine der wichtigsten Arbeiten der letzten Zeit erscheint mir die Untersuchung von *A. Kolmogoroff* [1]) über die „Analytischen Methoden der Wr.". Er behandelt darin einfach unendliche Folgen von Kollektivs, in denen *jede Verteilung durch die unmittelbar vorhergehende* linear bestimmt wird. Der einfachste Fall ist das schon von Bernoulli in Angriff genommene Problem der Summenbildung aus n Verteilungen. Gegeben für $n = 1, 2, \ldots$ sind $V_n(y)$, die Wahrscheinlichkeiten dafür, beim n-ten Zug aus einer Urne eine Zahl höchstens gleich y zu ziehen. Gefragt ist nach den Wahrscheinlichkeiten $W_n(x)$ dafür, daß die Summe der n ersten Ziehungsergebnisse höchstens gleich x wird. Die bekannte Lösung

$$W_n(x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} V_n(x_n - z)\, dW_{n-1}(z) \tag{4}$$

läßt sich nun ohne weiteres auch auf den Fall verallgemeinern, daß die Verteilung $V_n(y)$ von den früheren Teilsummen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ abhängt. Herr Kolmogoroff behandelt nur den für die physikalischen Anwendungen wichtigsten Fall, in dem lediglich die letzt-vorangehende Teilsumme x_{n-1} als Parameter auftritt. Die Fälle, in denen V_n von der letzten Differenz $x_{n-1} - x_{n-2}$ oder von mehreren Differenzen abhängt, sind unter dem Namen der *Markoffschen Ketten* erster oder höherer Ordnung bekannt. Einen ganz bestimmten Fall der Abhängigkeit von allen vorhergegangenen

[1]) *A. Kolmogoroff,* Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mathematische Annalen, Bd. 104, 1931, S. 415—458.

x-Werten hat einmal Herr *G. Pólya* [1]) behandelt. Kolmogoroff diskutiert nun für den angegebenen Fall, in dem aus (4)

$$W_n(x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} V_n(x_n - z;\, x_{n-1})\, dW_{n-1}(z) \tag{5}$$

wird, alle Möglichkeiten endlich vieler, abzählbarer und kontinuierlich unendlich vieler Werte für x. Das Hauptziel seiner Untersuchung ist jedoch die Erweiterung des Ansatzes für den Fall, daß auch *an Stelle des Index n* eine kontinuierliche Variable t tritt. Dieser Uebergang zum Kontinuierlichen wird in der physikalischen Statistik als Aufstellung einer *Fokker*schen Differentialgleichung bezeichnet. Aus (4) wird z. B. die Differentialgleichung der kräftefreien Diffusion [2])

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \tag{6}$$

worin der Faktor D im wesentlichen durch die Streuung der gegebenen Verteilungen bestimmt wird. Durch Erweiterung der von *Lindeberg* für das Summenproblem gegebenen Methode gelingt es Kolmogoroff in Zusammenhang mit dem Uebergang zum kontinuierlichen t Schlüsse auf das asymptotische Verhalten von W_n bei wachsendem n zu ziehen. Dieser Methode sind natürlich nicht alle Resultate erreichbar, die gebraucht werden und zum Teil schon vorliegen. Ich habe in meinem Buche den für das physikalische Ergodenproblem wesentlichen Fall einer endlichen Punktmenge für die x vollständig behandelt und gezeigt [3]), unter welchen Voraussetzungen das ergodische Verhalten, d. h. Konvergenz der Verteilungen W_n gegen eine von der Anfangsverteilung $W_0(x)$ unabhängige Grenze eintritt, sowie daß das allgemeinste Verhalten ein periodisches ist. Auch die beim gewöhnlichen Summenproblem in den Grenzfällen für diskrete x und für differenzierbare $V_n(x)$ früher von mir angegebenen Resultate [4]) sind der Lindeberg-Kolmogoroffschen Methode nicht zugänglich. Dasselbe gilt für die analogen Ergebnisse aus dem Problemkreis der Markoffschen Ketten, die Herr *G. Schulz* [5]) hier vortragen wird.

---

1) *F. Eggenberger und G. Pólya,* Ueber die Statistik verketteter Vorgänge. Zeitschrift für angew. Math. u. Mech. Bd. 3, 1923, S. 279 - 289.

2) *R. v. Mises,* Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen. Fr. Deuticke, Leipzig und Wien, 1931, S. 495 ff.

3) Vgl. das oben angef. Buch, § 16.

4) *R v. Mises,* Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ztschr. Bd. 4, 1919, S. 1—97. Vgl. a. das oben angef. Buch, § 8, Nr. 4 und 5. Der erstere dieser beiden Sätze ist ohne Quellenangabe abgedruckt bei *E. Kamke,* Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1932, S 148—160.

5) Vgl. ds. Bd., S.

Herr Kolmogoroff hat für seine Probleme wieder eine neue Bezeichnung eingeführt; er spricht von „stochastisch-definiten Prozessen". Versteht man darunter allgemein eine Folge einander sukzessive bestimmender Verteilungen, so muß man sagen, daß auch noch ganz andere, nämlich nicht-lineare Fälle dieser Art schon behandelt wurden. So gilt z. B. für die statistische Theorie der zweigeschlechtlichen Vererbung, wenn man die verschiedenen Rassen innerhalb einer Bevölkerung mit den Nummern x, die Verteilung der Bevölkerung über die Rassen in der n-ten Generation mit $W_n(x)$ bezeichnet:

$$W_n(x) = \iint V_n(x; y, z)\, dW_{n-1}(y)\, dW_{n-1}(z) \tag{7}$$

Das Vererbungsgesetz ist durch die Funktion $V_n(x; y, z)$ gegeben, die die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß aus einem Elternpaar der $(n-1)$ten Generation mit den Rassennummern y und z ein Kind hervorgeht, dessen Rassennummer höchstens gleich x ist. Für den speziellen Fall des Mendelschen Vererbungsgesetzes hat *H. Tietze*[1]) die asymptotische Lösung von (7) für wachsendes n angegeben.

Einen schönen Erfolg hat die Lindeberg-Kolmogoroffsche Methode aufzuweisen in der Lösung des von *Khintchine*[2]) angeregten und von ihm in Spezialfällen gelösten Problems, das man mit dem Namen „Gesetz des iterierten Logarithmus" kennzeichnet. Es handelt sich um eine Fragestellung aus dem Bereich des einfachen Summenproblems: Man zieht hintereinander aus n Urnen und betrachtet alle Teilsummen der gezogenen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$. Vorgegeben ist eine positive Funktion $f(\nu)$ und man fragt nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß $|x_\nu| \leqq f(\nu)$ für $\nu = n_1$ bis n. Es zeigt sich, daß unter sehr allgemeinen Voraussetzungen der Limes dieser Wahrscheinlichkeit, wenn zuerst n, dann n_1 ins Unendliche geht, gleich 1 bezw. 0 wird, je nachdem bei beliebig kleinem positiven δ

$$f(\nu) > \sqrt{2s_\nu^2 \ln \ln s_\nu^2}\,(1+\delta) \text{ oder } f(\nu) < \sqrt{2s_\nu^2 \ln \ln s_\nu^2}\,(1-\delta) \tag{8}$$

wobei s_ν^2 die Summe der Streuungen der ersten ν Verteilungen $V_1(x), V_2(x), \ldots V_\nu(x)$ ist. Während man dies früher nur sehr mühsam für sehr spezielle Ausgangsverteilungen $V_\nu(x)$ beweisen konnte, führt die in Rede stehende Methode die Frage auf ein Integrationsproblem der vorhin erwähnten Diffusionsgleichung zurück: Man hat im wesentlichen die Greensche Funktion dieser Gleichung für eine durch $f(\nu)$ bestimmte Berandung aufzusuchen[3]). In diesen Problemkreis gehört auch das von

---

[1]) *H. Tietze,* Ueber das Schicksal gemischter Populationen nach den Mendelschen Vererbungsgesetzen. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 3, 1923, S. 362—393.

[2]) *A. Khintchine,* Ueber das Gesetz der großen Zahlen. Math. Annalen, Bd. 96, 1926, S. 152—168.

[3]) *A. Kolmogoroff,* Eine Verallgemeinerung des Laplace-Liapounoffschen Satzes. Bull. de l'Acad. des Sciences de l'URSS, 1931, S. 959—962.

Khintchine gefundene sogenannte „Starke Gesetz der großen Zahlen“[1]): Setzt man $f(\nu) = C\nu$, wo C eine beliebige positive Konstante bedeutet, so geht die Wahrscheinlichkeit für $|x_\nu| \leqq f(\nu)$ bei dem oben betrachteten Grenzübergang dann und nur dann gegen 1, wenn $\Sigma \frac{s_\nu^2}{\nu^2}$ konvergiert.

III.

Ich komme zurück zu Problemen der Grundlagenforschung. Strittig ist noch immer die Formulierung des sogenannten *Regellosigkeitsaxioms*. Dies enthält bekanntlich die folgende Aussage über eine Zahlenreihe, die etwa durch das Aufzeichnen der Ergebnisse eines Würfelspiels entstanden ist: Wenn irgendeine unendliche Folge wachsender natürlicher Zahlen durch eine Formel vorgegeben wird und man aus der Gesamtheit der Spielergebnisse nur diejenigen auswählt, deren Nummer der vorgegebenen Teilfolge angehört, so genügt es, lange genug zu spielen, damit innerhalb der ausgewählten Teilfolge von Spielergebnissen dieselben Chancen bestehen, also dieselben relativen Häufigkeiten der verschiedenen Ergebnisse, wie in der Gesamtheit aller Spiele. Dieser Satz, der anschaulich als das „Prinzip vom ausgeschlossenen Spielsystem“ zu bezeichnen ist, schließt natürlich aus, daß etwa die Nummern der Spiele, deren Ergebnis 6 ist, durch irgendeine Formel angegeben werden können. Diese Konsequenz erscheint manchem unannehmbar, und es gibt verschiedene Ansätze, die Regellosigkeitsforderung entsprechend einzuschränken. Den Vorteil einer solchen Einschränkung kann man auch darin erblicken, daß es dann, wenigstens im Prinzip, möglich wird, die Formeln der Wr. auf zahlentheoretische Fragen anzuwenden. Wenn man z. B. beweisen kann, daß die Ziffernfolge in der unendlichen Dezimalentwicklung der Zahl π einer bestimmten eingeschränkten Regellosigkeitsannahme genügt, so könnte man auf sie *die* Sätze der Wr. anwenden, die sich noch bei der Einschränkung des Regellosigkeitsaxioms aufrechterhalten lassen. Einen Ansatz dazu bietet z. B. die Einführung der „*nombre normal*“ durch Herrn *E. Borel*[2]). Eine nombre normal hat, als Dezimalbruch entwickelt, die Eigenschaft, daß jede vorgegebene Kombination von n Ziffern im Limes mit der relativen Häufigkeit 10^{-n} erscheint. Allerdings hat sich bisher nicht zeigen lassen, daß irgend eine bekannte transzendente oder algebraische Zahl eine „nombre normal“ ist.

Eine andere Einschränkung der Regellosigkeitsforderung, die zugleich einen vollständig abgeschlossenen Aufbau der Wr. mit sich bringt, gibt Herr *K. Dörge* in

---

[1]) *A. Khintchine,* Sur la loi forte des grands nombres. Comptes rendus, Paris, t. 186, 1928, p. 285. ff.

[2]) *E. Borel* und *P. Dubreil,* Applications à l'Arithmétique et à la Théorie des Fonctions. Im «Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications» par Emile Borel. Tome II, Fasc. 1, Paris, 1926. S. 1—100.

seiner 1930 erschienenen Arbeit [1]). Er geht von der Auffassung aus, daß es von vornherein eine feste Zahl von Kollektivs und eine feste Zahl von Auswahloperationen gibt, die durch entsprechende Ergänzung zu einer endlichen oder abzählbar unendlichen Gesamtheit mit gewissen Gruppeneigenschaften erweitert wird. Alle Operationen der Auswahl, Verbindung usf. werden nun lediglich innerhalb der Gruppe zugelassen. Es besteht also Regellosigkeit der betrachteten Kollektivs nur hinsichtlich der Auswahloperationen der Gruppe. Auf diese Weise gelangt man zu ganz einwandfreien Formulierungen, wenn auch freilich nicht auf sehr einfache Weise. Will man die Dörgesche Theorie auf die Wirklichkeit anwenden, so muß man eben annehmen, daß alle Beobachtungsfolgen und alle Stellenauswahlen, mit denen man es zu tun hat, einer einzigen Gruppe angehören.

Schließlich hat neuerdings in einer demnächst erscheinenden Arbeit Herr *R. Iglisch* [2]) eine mögliche Einschränkung der Regellosigkeitsforderung skizziert. Er geht davon aus, daß eine Auswahlformel, d. h. eine gesetzmäßig definierte unendliche Folge wachsender Zahlen, erst dann eine konkrete Stellenauswahl liefert, wenn noch willkürlich der Anfangspunkt der Zählung in der Elementenfolge festgesetzt ist. Es gibt also zu einer Auswahlformel im allgemeinen unendlich viele konkrete Stellenauswahlen, und Herr Iglisch verlangt jetzt nur, daß bei *fast allen* unter ihnen die Grenzwerte der relativen Häufigkeiten der verschiedenen Ergebnisse, also die Spielaussichten, unverändert bleiben. Auch bei dieser eingeschränkten Forderung kann man die Sätze der Wr. im wesentlichen begründen. Es wird bei einer solchen Fassung der Theorie dem populären Einwand ausgewichen, man könnte ja „zufällig" einmal gerade diejenige Formel erwischen, die wirklich dem unbekannten Ablauf der Spielergebnisse entspricht. Ich kann diesen Einwand nicht berechtigt finden. Namentlich hat die neueste Entwicklung der Physik uns schon die Auffassung nahegebracht (die immer schon zu Recht bestand), daß es keine Determiniertheit gibt, die von der Angebbarkeit verschieden ist. Es hat keinen Sinn zu sagen, irgendein Ablauf sei bestimmt, könne aber in keiner Weise vorausgesagt werden, oder er sei zwar unbestimmt, könnte aber in seiner ganzen unendlichen Erstreckung sozusagen zufallsweise vorher erraten werden.

Zusammenfassend möchte ich sagen, daß ich nicht glaube, mit meiner weitesten Fassung des Regellosigkeitsaxioms die letzte Formulierung gefunden zu haben — historisch ist es wohl überhaupt die erste —, daß ich aber in den bisherigen von anderer Seite gemachten, gewiß sehr wertvollen Ansätzen noch keine *brauchbarere* Lösung erblicken kann.

---

[1]) *Karl Dörge,* Zu der von R. von Mises gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1. Mitteilung: Theorie des Glücksspieles. Math. Ztschr. Bd. 32, 1930, S. 232—258.

[2]) *R. Iglisch,* Zum Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Annalen, 1932.

BEMERKUNGEN ZUR KORRELATIONSTHEORIE

Von H. POLLACZEK-GEIRINGER, Berlin

Die Korrelationstheorie stellt sich bekanntlich vor allem die Aufgabe, aus der Struktur einer zweidimensionalen Verteilung $v(x, y)$ Schlüsse zu ziehen auf die sogenannte stochastische Abhängigkeit der Variablen. Zu diesem Zweck werden gewisse Korrelationszahlen definiert, (die zwischen o und 1 liegen,) wie z. B. die gewöhnliche aus den zweiten Momenten gebildete Korrelationszahl r oder die *Pearson*sche f^2, wobei o dem Fall der *Unabhängigkeit* entspricht, ($v(x, y)$ zerfällt in ein Produkt zweier Funktionen von x bezw. y allein), $|1|$ dem Fall eindeutiger *funktionaler Abhängigkeit,* während den Zahlen zwischen o und 1 die verschiedenen Grade stochastischer Abhängigkeit entsprechen. Nun kann ja durch Angabe *einer* Zahl auf keine Weise sehr viel über die Verteilung zum Ausdruck gebracht werden, man weiß aber darüber hinaus meist überhaupt nicht, was eine bestimmte Angabe, wie etwa r sei gleich 0,77 eigentlich besagen soll.

Darum kann man sich die Aufgabe stellen, theoretisch einfache, anschauliche *Modelle* zu konstruieren, die durch Variation gewisser Parameter alle möglichen Werte der Korrelationszahlen ergeben, so daß ein empirisch gewonnenes Resultat jeweils mit einem gewissen Modellfall vergleichbar ist. Dies wird durchgeführt an verschiedenen „Ueberdeckungs"-Modellen, bei denen der Grad der Ueberdeckung, der im Wesentlichen die stochastische Abhängigkeit bedingt, sowohl ganzzahlig, wie auch stetig variiert werden kann. Insbesondere übersieht man, wie eine kleine oder verschwindende Korrelationszahl auch auftreten kann, wenn zwei Bindungen verschiedener Art einander aufheben. — An diesen Modellen kann man auch die Eigenschaften und das Verhalten der einzelnen Korrelationszahlen studieren. Dies führt u. a. zu einer *Kritik* des Pearsonschen f^2.

Die zweite Bemerkung knüpft an bekannte Mängel der üblichen Korrelationszahlen an: $r = |1|$ tritt nur auf bei *linearer* Abhängigkeit, während bei nicht linearer eindeutig funktionaler Abhängigkeit jeder r-Wert zwischen o und $|1|$ erreichbar ist. f^2 ist nur definiert für *arithmetische* Wahrscheinlichkeiten und auch für diese nur „im Quadrat" (d. h. $x = 0, 1, \ldots k$, $y = 0, 1, \ldots k$).

Es wird ein neues *Korrelationsmaß* eingeführt, das allgemein anwendbar und von den genannten Mängeln frei ist, ausgehend von der *Summenverteilung* $V(x, y)$ zu $v(x, y)$, die ja zu jedem v existiert und event. sogar als das Primäre betrachtet werden kann. Dies hat an und für sich Interesse, ähnlich wie man in der Statistik neben die mit den Verteilungen arbeitende χ^2-Methode, nach v. *Mises,* die auf der Summenverteilung aufgebaute ω^2-Methode setzt. — Bei einer beliebigen Verteilung kann man

nämlich zu jedem Punkt x, y vier Zahlen rechnen, $V(x, y) = A(x, y)$ gleich der gesamten „Masse" links unten (also links von der Vertikalen $\xi = x$, unterhalb von $\eta = y$), $D(x, y)$ gleich der Masse rechts oben, $C(x, y)$ gleich der rechts unten, $B(x, y)$ gleich der links oben. Das daraus gebildete

$$F = \frac{\iint (AD - BC)\, dx\, dy}{\iint (AD + BC)\, dx\, dy}$$

ist stets definiert, liegt zwischen 0 und $|1|$, und gibt $+1$ bezw. -1 dann und nur dann, wenn die Verteilung auf einer monoton zu- bezw. abnehmenden Kurve liegt. Allerdings *kann F verschwinden* (ebenso wie auch r), ohne daß $v(x, y)$ ein Produkt ist, ein Uebelstand, der sich bei einem Maß *mit Vorzeichen* kaum vermeiden läßt. Verzichtet man auf das Vorzeichen, so *kann* man ihn vermeiden, indem man in F den Integranden des Zählers und des Nenners *quadriert*. — Die neuen Maße lassen sich für arithmetische Verteilungen nach ähnlich einfachem Schema rechnen wie r und f^2. Für allgemeinere Verteilungen, insbesonders geometrische, ist die Auswertung von Integralen erforderlich, was zunächst für F an dem Beispiel der Gaußschen Verteilung durchgeführt wird.

ÜBER DAS SUMMENPROBLEM BEI MARKOFFSCHEN KETTEN

Von GÜNTHER SCHULZ, Berlin

Eine Folge von Ziehungen aus k mit den Nummern 1, 2, ..., k bezeichneten Urnen, deren jede in beliebigem Mischungsverhältnis Lose mit je einer der Zahlen 1, 2, ..., k enthält, heißt eine *Markoffsche Kette,* wenn aus der Urne mit der Nummer x immer dann das Los gezogen wird, falls die vorhergehende Ziehung das Merkmal x ergeben hat. Gegeben ist eine quadratische Matrix $\mathfrak{V}$ von k^2 Elementen $v(x; y)$, die die Wahrscheinlichkeit geben, daß aus der mit y bezeichneten Urne ein Los mit dem Merkmal x gezogen wird, und die Wahrscheinlichkeit $w_0(x)$ dafür, daß die Folge der Ziehungen mit der Urne x eingeleitet wird.

Markoff hat sich unter gewissen Einschränkungen, die die verschwindenden Elemente in $\mathfrak{V}$ betreffen, mit dem Summenproblem beschäftigt, d. h. mit dem asymptotischen Verhalten von $W_n(X)$, der Wahrscheinlichkeit in n aufeinanderfolgenden

Ziehungen die Summe X zu erhalten, und gezeigt, daß die Summenfunktion dieser Verteilung gegen das *Integral einer Gaußschen Verteilung* konvergiert. *S. Bernstein* hat seine Ergebnisse wesentlich verallgemeinert.

Hier soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen schon $W_n(X)$ *selbst* für $n \to \infty$ gegen eine Gaußsche Verteilung konvergiert. Benutzt werden Methoden, die schon früher vom Vortragenden entwickelt worden sind, sowie Verallgemeinerungen von Sätzen, die *R. v. Mises* für seinen Beweis des ersten Fundamentalsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgestellt hat. Vorausgesetzt wird, daß $\mathfrak{D}$ nicht total zerfällt und daß $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{D}^n = \mathfrak{D}^\infty$ existiert. Dann konvergiert $w^n(x)$, die Wahrscheinlichkeit, bei der n-ten Ziehung ein Los mit dem Merkmal x zu erhalten, gegen eine Limesverteilung $w(x)$, deren Mittelwert a sei. Als die zu $\mathfrak{D}$ gehörige *erzeugende Matrix* $\Omega(\vartheta)$ mit den Elementen $\omega(x; y)$ wird das Matrizenprodukt $\Theta\mathfrak{D}$ definiert. Θ ist eine Diagonalmatrix mit den Elementen

$$e^{i(1-a)\vartheta},\; e^{i(2-a)\vartheta},\; \ldots,\; e^{i(k-a)\vartheta} \quad (\vartheta \text{ reell.})$$

Für sämtliche charakteristische Zahlen $\varkappa_\iota$ von $\mathfrak{D}$ und von Ω gilt $|\varkappa_\iota(\vartheta)| \leqq 1$. Als *wesentliche Bedingung* wird vorausgesetzt, daß $|\varkappa_\iota(\vartheta)| < 1$ sei für $0 < \vartheta < 2\pi$. (Sie ist sicher erfüllt, wenn $\mathfrak{D}$ nur positive Elemente hat; sie kann ferner durch andere ersetzt werden, die von der Anordnung der Nullen in $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{D}^\infty$ ausgehen und bequemer nachprüfbar sind.) Die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von Ω^n mit den Elementen $\omega^{(n)}(x; y)$ zeigt, daß unter den gemachten Voraussetzungen mit $n \to \infty$ schon

$$W_n(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{x=1}^{k} \sum_{y=1}^{k} \omega^{(n)}(x; y)\, w_0(y)\, e^{-i(X-na)\vartheta}\, d\vartheta$$

selbst gegen eine Gaußsche Verteilung konvergiert, die von der Ausgangsverteilung $w_0(x)$ unabhängig ist und den Mittelwert $n\,a$ besitzt. Führt man noch die Diagonalmatrix $\mathfrak{X}$ mit den Elementen $1 - a,\; 2 - a,\; \ldots,\; k - a$ ein und die Matrix

$$\mathfrak{F} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{D}^\nu - \mathfrak{D}^\infty) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{D} - \mathfrak{D}^\infty)^\nu,$$

die der Gleichung $(\mathfrak{E} - \mathfrak{D} + \mathfrak{D}^\infty)\,\mathfrak{F} = \mathfrak{D} - \mathfrak{D}^\infty$ genügt, so liefert die Summe jeder Spalte der leicht zu berechnenden Matrix $\mathfrak{D}^\infty \mathfrak{X}^2 \mathfrak{D}^\infty + 2\,\mathfrak{D}^\infty \mathfrak{X} \mathfrak{F} \mathfrak{X} \mathfrak{D}^\infty$ die durch n dividierte Streuung der Gaußschen Verteilung. ($\mathfrak{E}$ ist die k-reihige Einheitsmatrix.)

SUR LA LOI SINUSOÏDALE LIMITE

Par V. ROMANOVSKY, Tachkent

Soit $\ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots$ une suite infinie de quantités stocastiques (ou aléatoires) dépendantes, telles que

$$E x_i = 0, \; E x_i^2 = \sigma^2 = \text{const.},$$
$$E x_i \, x_{i \pm k} = \sigma^2 \varrho_k$$

(E est le symbole de l'espérance mathématique).

Soient ensuite

$$x_i^{(1)} = x_i + x_{i-1} + \ldots + x_{i-s+1},$$
$$x_i^{(2)} = x_i^{(1)} + x_{i-1}^{(1)} + \ldots + x_{i-s+1}^{(1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_i = x_i^{(n)} = x_i^{(n-1)} + x_{i-1}^{(n-1)} + \ldots + x_{i-s+1}^{(n-1)} \qquad (s \geqq 2)$$

et

$$z_i = \Delta^m y_i = \sum_{h=0}^{m} (-1)^h C_m^h y_{i+m-h}.$$

Alors on peut démontrer que la suite $\ldots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \ldots$ obéit à la loi sinusoïdale limite pour

$$m \longrightarrow \infty, \; n \longrightarrow \infty, \; \frac{m}{n} \longrightarrow \alpha \neq 1,$$

si les coefficients de corrélation ϱ_k sont égaux à zéro pour $k > l$, l étant un nombre arbitrairement grand, mais fixe; ou s'ils satisfont à la condition moins restrictive, de rendre uniformément convergente dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la série $\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k \cos 2kt$.

Ce fait est une généralisation du résultat que j'ai démontré pour le cas $\varrho_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$). (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1932).

AN EXPANSION FOR LAPLACIAN INTEGRALS IN TERMS OF INCOMPLETE GAMMA FUNCTIONS, AND SOME APPLICATIONS

By EDWARD C. MOLINA, New York

This paper presents a *modified Laplacian expansion* for evaluating definite integrals of the type

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y_1^{\theta_1}\, y_2^{\theta_2} \ldots y_n^{\theta_n}\, \Phi\, dx,$$

where $y_1, y_2, \ldots y_n$ are functions of x whose exponents $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ are of the same order of magnitude as a large number θ; the last function in the integrand, Φ, embraces all factors whose exponents are of low order of magnitude compared with θ.

The *modified expansion* reduces to its first term as θ approaches infinity, a condition which is not always fulfilled by the expansion given by Laplace in the "Théorie Analytique des Probabilités". The paper consists of five parts as follows:

1 — Introduction.
2 — Deduction of *Modified Expansion.*
3 — Applications I — To Incomplete Beta Integral.
II — To the I_n Bessel Integral.
4 — Appendix I — On a Method of Obtaining the Coefficients for the Modified Expansion.
5 — Appendix II — Details of the Analysis for the Beta Integral.

DE LA DISPERSION AFFÉRENTE À LA SOMME DE n ERREURS, DANS LE CAS OÙ CHACUNE DES ERREURS COMPOSANTES EST RÉGIE PAR UNE LOI SIMPLE — ESSAI D'UNE REPRÉSENTATION ANALYTIQUE

Par R. RISSER, Paris

Etant donnée une série d'erreurs indépendantes x_i au nombre de n, dont la dispersion est pour chacune d'elles caractérisée par la loi $\frac{1}{2a}\, dx_i$ dans le champ $(-a, +a)$, on peut se proposer tout d'abord d'évaluer la probabilité pour que

la somme des n erreurs x_i soit comprise entre $(n - 2p)a$ et $(n - 2p + 2)a$, puis de rechercher ce que devient la fonction représentative lorsque le nombre des erreurs croît, de rattacher cette étude à celle d'une des formes de distribution de Pearson, et enfin de généraliser les résultats trouvés.

Je montre tout d'abord que les courbes de dispersion sont dans l'intervalle $(n - 2p)a$, $(n - 2p + 2)a$ — que n soit pair ou impair — représentées par le polynôme

$$(1) \quad \frac{1}{(n-1)!(2a)^n}\left\{(na-\beta)^{n-1} - C_n^1\left[(n-2)a-\beta\right]^{n-1} + \ldots + (1)^{p-1} C_n^{p-1}\left[(n-2p+2)a-\beta\right]^{n-1}\right\},$$

avec

$$C_n^j = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}.$$

Après avoir procédé au calcul des moments μ_o, μ_2, μ_4, nous utilisons l'intégrale

$$I = \int_o^\infty \frac{\cos sx \left(\frac{\operatorname{Sin} x}{x}\right)^n dn}{\pi},$$ qui nous fournit le premier développement

$$(2) \quad I = \sqrt{\frac{3}{2n\pi}}\, e^{-\frac{3}{2}r^2}\left[1 - \frac{3}{20\,n}(1 - 6r^2 + 3r^4) + \ldots\right], \text{ avec } s = r\sqrt{n},$$

puis le second développement

$$(3) \quad I = \frac{(n + r\sqrt{n})^{n-1} - C_n^1 (n + r\sqrt{n} - 2)^{n-1} + C_n^2 (n + r\sqrt{n} - 4)^{n-1} - \ldots}{(n-1)!\,2^n}$$

où l'on ne fait intervenir que les puissances positives.

Il est alors possible de rapprocher l'expression (3) de celle du polynôme (1), et de retrouver en partant de (3) les valeurs de μ_o, μ_2, μ_4. *On constate ainsi qu'en première approximation, ces probabilités sont définies par la courbe de Laplace-Gauss.*

Emploi de la fonction caractéristique. On remarque facilement que la fonction de Cauchy relative à la composition de n erreurs du type étudié est définie par $\left(\frac{sh\,at}{at}\right)^n$, et que la loi de probabilité en connexion avec cette fonction se ramène à

$$(4) \quad F_o(x) + \frac{3^2}{5!\,n} F^{(IV)}(x) - \frac{3^3}{7!\,n^2} F^{(VI)}(x) + \ldots,$$

où $F^{(2p)}(x)$ n'est autre que la dérivée d'ordre $2p$ de la loi réduite normale

$F_o(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$; si l'on s'arrête à la seconde approximation, et si l'on fait

$x = \beta \sqrt{\frac{3}{n}}$, on aboutit à un résultat obtenu au cours de cet essai pour la valeur de l'ordonnée moyenne d'un tronçon.

On peut aussi retrouver tous les développements précédents en recourant au facteur de discontinuité de M. Galbrun.

$$(5)\quad \psi(x) = \psi[H(y-u)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_o^\beta e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha + \sum_{p-1}^{\infty} \frac{P_{2p}[H(y-u)]\, P_{2p-1}(\beta)\, e^{-\beta^2}}{2^{2p}(2p)!}\right]$$

(voir CR 8 Févr. 1909).

Rapprochement avec une certaine fonction de distribution de Pearson. Dans le cas actuel, on peut aussi chercher à ajuster la courbe globale (C_o) de probabilité à $y = y_o\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^m$, et l'on est ainsi conduit à la courbe (C_1)

$$(6)\qquad y = y_o\, e^{-\frac{3x^2}{2na^2}\left(1 - \frac{3}{5n-2}\right)}$$

On aboutit à un ajustement fournissant telle approximation aussi serrée que l'on voudra en faisant appel à un développement de la forme

$$(7)\qquad y = y_o\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^m \left(1 + \sum_{K=5}^{\infty} \frac{\lambda_o}{\lambda_k}\,\frac{S_k}{S_o}\right),$$ (voir Romanovsky Biom. T. 16, 1924)

développement qui est convergent dans les conditions statistiques du problème.

Généralisation. Etant données les séries d'erreurs x_i, y_j, z_l, ... suivant respectivement les lois simples $\frac{1}{2a}\,dx_i$, $\frac{1}{2b}\,dy_j$ .... on voit — en vertu de l'hypothèse de l'indépendance des systèmes x_i, y_j, z_l, ... et des erreurs x_i entre elles .... — et grâce au raisonnement fait précédemment, que la probabilité pour que

$$(n-2p)\,a \leqq \sum_1^n x_i < (n-2p+2)\,a,\ (n'-2p')\,b \leqq \sum_1^{n'} y_j \leqq (n'-2p'+2)\,b,\ \ldots.,$$

s'exprime soit: au moyen du produit $(P_i\, Q_j\, R_l\, \ldots.)$ où (P_i, Q_j, R_l) représentent respectivement des polynômes de degrés $(n-1)$, $(n'-1)$ ..., soit au moyen du produit d'intégrales ou de séries.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik und Statistik

ZUR THEORIE DER ARITHMETISCHEN VERTEILUNGSFUNKTIONEN UND DER STATISTISCHEN REIHEN

Von ALF GULDBERG, Oslo

Eine statistische Reihe wird als wahrscheinlichkeits-theoretische erklärt, wenn es gelingt, für sie eine Verteilungsfunktion derart anzugeben, daß die theoretischen Wahrscheinlichkeiten, die die Verteilungsfunktion liefert, mit den beobachteten relativen Häufigkeiten befriedigend übereinstimmen.

In der vorliegenden Mitteilung wird anstatt des endlichen Ausdrucks einer Verteilungsfunktion die Differenzengleichung, die der Verteilungsfunktion genügt, zugrunde gelegt.

Bei dieser Betrachtungsweise gelingt es, Kriterien anzugeben, denen eine vorgelegte statistische Reihe, um durch eine gegebene Verteilungsfunktion approximiert zu werden, genügen müssen. Zweitens ergeben sich in einfacher Weise Rekursionsformeln für die Momente und auch für die unvollständigen Momente einer gegebenen Verteilungsfunktion.

Tschuprow schrieb in einer bekannten Abhandlung (Nordisk Statistisk Tidsskrift, 1922 p. 389): „Ich sehe überhaupt keinen Weg, auf welchem man, ohne über die durch das Experiment gelieferten empirischen Angaben hinauszugehen, feststellen kann, ob eine vorliegende Reihe von meinetwegen $r \,.\, n$ aus einer geschlossenen Urne gezogenen Nummern in der Weise erhalten worden ist, daß die gezogenen Nummern vor der nächsten Ziehung in die Urne zurückgelegt wurden oder nicht. Ich wage freilich nicht zu behaupten, daß die Aufgabe unlösbar ist.“

Die vorliegende Untersuchung gibt auch eine Antwort auf diese Aufgabe, indem gezeigt wird, daß die statistische Reihe in den zwei erwähnten Fällen zwei wesentlich verschiedenen Differenzengleichungen genügen müssen.

ZUR STATISTISCHEN THEORIE DER LOGISTISCHEN FUNKTION

Von KARL GOLDZIHER, Budapest

1. Die in die verschiedensten angewandten Gebiete eintretende logistische (autokatalytische) Funktion

$$y(x) = \frac{1}{1 + e^{-rx}} = \frac{y_0 y_\infty}{(1 - e^{-rx}) y_0 + e^{-rx} y_\infty}$$

kann als eine gewogene harmonische Mittelbildung gedeutet und nach der Art dieses interpolatorischen Prozesses rechnungsmäßig verallgemeinert werden. (Gegenüberstellung der gesetzesmäßigen und der rechnungsmäßigen statistischen Ansätze.) Unsere Verallgemeinerung entsteht aus der vorwärtigen Extrapolation solcher doppeltabgestuften dynamisch-statistischen Zahlenreihen (z. B. säkulare Schwankungen der Versicherungspraxis angehörender Folgen nach Altersgruppen), für welche der zeitliche Ablauf neben einem endlichen asymptotischen Grenzextremum auch das Vorhandensein eines, für die einzelnen Gruppen sich charakteristisch verschiebenden Wendepunktes vermuten läßt. Die Wiedergabe der Tendenz eines im Intervall $0 \ldots \infty$ vermutbaren Wendepunktes kann mit Einführung eines neuen Parameters, durch die Verallgemeinerung des harmonischen Ansatzes in Form einer gewogenen Potenzmittelbildung

$$y(x) = \left[e^{-rx} y_0^\rho + (1 - e^{-rx}) y_\infty^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

mit $\varrho < 0$ geschehen (s. Aktuárské Vědy 1930); $\varrho = -1$: ursprüngliche logistische Formel mit symmetrischem Wendepunkt.

2. Die durch fortlaufende Wiederholungen ableitbaren *Moser*'schen Intensitätsfunktionen höherer Ordnung können verwertet werden: *a*) zu einer Systematik der wichtigsten statistischen empirischen Ansätze, *b*) mit Anwendung der bereits eine mechanische Tendenzglättung hineinbringenden Annäherungsformeln der numerischen Differentiation zu brauchbaren Kriterien der Anwendbarkeit bezw. der Konstantenbestimmung. Die für den allgemeinen logistischen Fall geltenden Beziehungen ($\mu_2 = -\varrho\,\mu_1 - r$; $\mu_3 = -\varrho\,\mu_1$; $\mu_4 = \mu_2$; μ_3; μ_2; usf.) weisen im besondern darauf hin, wie einfach das bei der vorangehenden Bestimmung des neuen Parameters auftretende markante transcendente Gleichungssystem nach dieser Art

numerisch zu lösen ist. — Umformung dieser Methoden für die höheren Verhältniszahlen der endlichen Veränderung.

3. Hinweise auf anders geartete Kriterien der Anwendbarkeit.

4. Die für dynamisch-statistische Vergleichszwecke wichtige Eigenschaft der *Makeham*'schen Formel, daß die „dynamische Verbesserung" (Weiterbildung der *Moser*'schen „Lebensverbesserung") nur *ein* Extremum annehmen kann (s. die Berner Dissertation 1922 von *Bodenehr*), läßt sich auf die allgemein logistischen Ansätze bei $\varrho < 0$ übertragen; es sollte die Klasse solcher Ansätze abgegrenzt werden.

5. Historische Bemerkung: Eine Art logistischer Funktion wurde für statistische Zwecke noch vor *Verhulst* durch *D. Bernoulli* (C. R. 1760) verwendet.

SUR UN PROBLÈME CAPITAL DU CALCUL DES PROBABILITÉS

Par S. DUMAS, Berne

Lorsque nous utilisons les mathématiques pour prévoir les phénomènes naturels, nous nous plaçons à deux points de vue. Au premier, nous partons de la relation de cause à effet ; nous appliquons la mécanique rationnelle ; la mécanique céleste nous donne un bel exemple de cette méthode. Au second point de vue, nous supposons que le phénomène est dû au hasard ; nous nous servons du calcul des probabilités et de la mécanique statistique ; la théorie cinétique des gaz et la thermodynamique justifient ce procédé.

Les deux méthodes ne sont exactes qu'à la limite. Dans la première, il faut que le phénomène soit complètement déterminé par des conditions initiales simples et par un petit nombre de causes, de préférence une seule. Dans la seconde, les causes sont infiniment petites ; comme nous cherchons à prévoir le résultat d'un grand nombre d'épreuves, nous supposons que les conditions initiales ne varient pas au cours de l'expérience ou, du moins, qu'elles soient bien connues avant tout essai. Conformément à la tendance du mathématicien, nous simplifions les hypothèses afin de pouvoir raisonner.

Mais les phénomènes naturels sont complexes et ne se plient pas à nos méthodes. Entre nos deux extrêmes, il y a un vaste domaine dans lequel les mathématiques ne nous sont que d'un faible secours. En particulier, s'il est assez souvent licite d'ad-

mettre qu'un phénomène est dû au hasard, nous ne pouvons pas lui appliquer les théorèmes de Bernoulli ou de Poisson, car les événements successifs ne sont pas indépendants. Nous sommes ainsi conduits à un problème que nous estimons capital : trouver des formules utilisables lorsque les événements dépendent les uns des autres et en pousser l'étude jusqu'au calcul numérique.

Parmi les nombreux exemples propres à illustrer notre opinion, n'en citons qu'un : le problème du risque dans l'assurance sur la vie. La mortalité dépend dans une large mesure du hasard, mais diverses causes, influences météorologiques, épidémies, guerres, etc., font que les écarts n'en obéissent pas à la loi de Bernoulli.

Le problème se décompose en deux suivant qu'on l'examine sous l'aspect mathématique ou sous celui des applications. Au premier point de vue, il faudrait imaginer des schémas d'urnes dans lesquels la couleur des boules extraites influencerait celle des boules à extraire, trouver entre les événements des liaisons sur lesquelles on puisse raisonner, définir des fonctions qui modifieraient les probabilités pour amplifier ou réduire les écarts, enfin étudier des lois d'écarts autres que celles de Bernoulli. Le problème n'est pas nouveau ; il se rattache aux études de Markoff sur les phénomènes liés en chaînes. On a déjà quelques formules, malheureusement mal adaptées au calcul numérique.

Pour les applications, il faudrait, par des statistiques, définir soit la loi des écarts elle-même, soit les fonctions qui la modifient.

Les efforts réunis des mathématiciens et des praticiens ne seront pas de trop pour résoudre un problème aussi difficile ; c'est pourquoi nous avons estimé utile d'attirer l'attention de nos auditeurs sur l'importance de la question et, à cet effet, de la placer dans un cadre général.

ERKENNTNISTHEORETISCHE BEGRÜNDUNG DER WAHRSCHEINLICHKEITSLEHRE[1])

Von W. STERNBERG, Breslau

Die Begründung gliedert sich in 3 Teile. Es handelt sich um die Begriffe „Ereignis", „Zufälligkeit" und „Wahrscheinlichkeit".

I. „Ereignis" im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie bedeutet die *Möglichkeit* des Geschehens oder noch allgemeiner die Möglichkeit des Seins. Sein ist tatsäch-

[1]) Eine ausführlichere Darstellung erscheint als Einleitung zu meinem Buche „Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Verlag Vieweg).

lich allgemeiner als Geschehen. Geschehen ist Sinn in zeitlicher Abfolge. Außerdem gibt es aber ein Sein, bei dem es auf den Zeitbegriff gar nicht ankommt. Ein Ereignis im obigen Sinne ist also nicht etwas, was bereits geschehen ist oder geschieht. Das würde dem gewöhnlichen Sprachgebrauche entsprechen. Es wird im Gegenteil angenommen, daß es nicht geschehen, nicht realisiert sei. Die Fälle, daß ein Ereignis eintreten muß oder andererseits nicht eintreten kann, sind Grenzfälle, welche in die Theorie mit einbezogen werden. Wenn von Wahrscheinlichkeit (s. unter III.) die Rede ist, so ist immer die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in obigem Sinne gemeint. Fragt man z. B. nach der Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit 10 weißen und 5 schwarzen Kugeln eine weiße Kugel zu ziehen oder bei einer Messung einen Fehler zwischen — 1 und + 1 zu erhalten, so sind das offenbar „Ereignisse".

II. Unser Ereignisbegriff enthält bereits implizite den Begriff des Zufalls. Denn wenn etwas sein kann, aber nicht sein muß, so ist hiermit schon die *Zufälligkeit* im Gegensatz zur *Notwendigkeit* eingeführt. Wir sehen die beiden letztgenannten Begriffe als Denkformen oder in der Kantschen Ausdrucksweise als „Kategorien" an (s. „Kritik der reinen Vernunft"). Sie sind also apriorische Formen des Denkens, welche es dem Verstande erst ermöglichen, die Wirklichkeit aufzufassen, sei es in der einen (Notwendigkeit), sei es in der andern (Zufälligkeit) Form. Sie sind daher für uns logische Grundbegriffe, die nicht aus anderen Begriffen abgeleitet zu werden brauchen. Die Kategorie der *Kausalität* kann als eine besondere Art der Notwendigkeit gelten. Faßt man nämlich ein „Geschehen", d. h. ein Sein in einer bestimmten Zeitabfolge (s. o.), im Sinne der Notwendigkeit auf, so wird die Notwendigkeit zur Kausalität. Danach erscheint die Notwendigkeit als der allgemeinere, die Kausalität als der speziellere Begriff (vielleicht in einem gewissen Gegensatz zu Kant).

Im Rahmen der Kantschen Erfahrungstheorie („Kritik der reinen Vernunft") spielt die Kategorie der Zufälligkeit nicht eine so entscheidende Rolle wie die Kausalität. Dies ist historisch begründet. Denn die ganze Physik zur Zeit Kants war auf dem Prinzip der Kausalität aufgebaut. Andererseits wurde Kant durch eine Kritik der Humeschen Kausalitätslehre zu seinem Werke angeregt. Die Aufgabe des Wahrscheinlichkeitstheoretikers aber ist es nun gerade, das Prinzip der Zufälligkeit zur Geltung zu bringen.

Als Denkformen, d. h. als methodische Prinzipien der Auffassungsweise, bilden Notwendigkeit und Zufälligkeit offenbar Gegensätze. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung treten sie jedoch in eine andere Beziehung zu einander. Hier erscheint die Zufälligkeit allein als das allgemeine fundamentale Prinzip und die Notwendigkeit (ebenso auch die Unmöglichkeit) als ein Grenzfall.

Gebraucht man zur Erlangung von Naturerkenntnissen die Denkform der Notwen-

digkeit, die hier zur Kausalität wird, so erhält man „Naturgesetze" von der Art des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Legt man die Denkform der Zufälligkeit zugrunde, so kommt man zu „Wahrscheinlichkeitsaussagen", wie sie z. B. in der kinetischen Gastheorie oder in der Quantenmechanik auftreten. Außerdem gewinnt man noch sogenannte „Erhaltungssätze", z. B. das Gesetz der Erhaltung der Energie. Ein Erhaltungsgesetz hat, vom mathematischen Standpunkt aus, immer die Bedeutung einer Gleichung für einen „Mittelwert".

III. Der Mathematiker, der alle Dinge auf Zahlen zurückführt, muß auch die „Wahrscheinlichkeit" als eine Zahl definieren: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist eine dem Ereignisse zugeordnete Zahl. Sie genügt gewissen Axiomen, welche die Grundlage der mathematischen Wahrscheinlichkeitslehre bilden. Als Axiomensystem kann man das von Bohlmann (Enz. d. math. Wiss., Bd. I, Abschnitt „Versicherungsmathematik") angegebene benutzen.

VALEURS MOYENNES DES QUANTITÉS QUI VARIENT AVEC LE TEMPS

Par B. HOSTINSKÝ, Brno

Si les lois qui régissent l'évolution d'un système physique sont exactement connues, les variations de ce système peuvent être définies, par exemple, par des équations différentielles. Si l'on ne connaît pas complètement les lois d'évolution, il faut introduire certaines probabilités ou valeurs moyennes. Je me propose d'étudier le cas où un point M se meut sur le segment de l'axe Ox allant de $x=a$ à $x=b$; la position de M sera définie par son abscisse x; on a $a \leqq x \leqq b$.

Soit x_1 l'abscisse de M à l'instant t_1 ; nous admettons que la probabilité pour que M se trouve à l'intérieur du segment infinitésimal $(x_2, x_2 + dx_2)$ à l'époque t_2 $(t_1 < t_2)$ soit égale à $\Phi\,(x_1\, x_2, t_1, t_2)\, dx_2$. La fonction Φ (« densité de probabilité du passage de x_1 à x_2 » ou simplement « probabilité de passage ») 2. satisfait aux conditions

$$\left.\begin{aligned} &\Phi\,(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2) > 0, \quad \int_a^b \Phi\,(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2)\, dx_2 = 1 \\ &\Phi\,(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2) = \int_a^b \Phi(x_1,\ z,\ t_1,\ t)\ \ \Phi(z,\ x_2,\ t,\ t_2)\, dz \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

avec $t_1 < t < t_2$.

J'ai montré[1]) qu'on peut construire une solution générale Φ du problème (1). Cette solution qui contient une fonction arbitraire de trois variables se présente sous la forme d'une série infinie dont chaque terme représente une certaine probabilité de passage et dont la somme donne la probabilité totale Φ. Une telle fonction Φ étant connue, si $F(x)$ est une fonction du point mobile M et si l'abscisse de M à l'époque t_1 est égale à x_1, la valeur moyenne de $F(x)$ à l'époque t_2 est égale à

$$\int_a^b F(x_2)\, \Phi(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_2 .$$

Supposons maintenant que le mouvement du point M soit défini par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t). \tag{2}$$

Représentons les états du point M par des points figuratifs N dans le plan (x, t). Le mouvement de M, déterminé par un état initial (x_1, t_1), sera figuré dans le plan (x, t) par la courbe intégrale de (2) passant par le point $A_1\,(x_1, t_1)$. Cela posé soit $\Phi\,(x_1, x_2, t_1, t_2, \varepsilon)$ une fonction qui satisfait aux conditions (1) et qui dépend non seulement des coordonnées x_1, x_2, t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ mais aussi d'un paramètre ε ; supposons que l'on ait $\lim_{\varepsilon=0} \Phi\,(x_1, x_2, t_1, t_2, \varepsilon) = 0$ sauf dans le cas où le point $A_2\,(x_2, t_2)$ est situé sur la courbe intégrale de l'équation (2) qui passe par $A_1(x_1, t_1)$. Dans ce cas le mouvement du point M est déterminé (pour $\lim \varepsilon = 0$) par l'état initial (x_1, t_1) ; M se trouve dans la position x_2 à l'instant t_2. Ainsi la loi de mouvement exprimée par (2) correspond à un choix particulier de la fonction Φ qui donne les probabilités de passage et qui satisfait aux conditions (1).

Des circonstances analogues se présentent quand on étudie l'évolution d'un système variable qui dépend de plusieurs paramètres. La fonction Φ qui donne les probabilités de passage dépend alors de plusieurs variables ; il faut remplacer les intégrales simples qui figurent dans (1) par des intégrales multiples. Et en choisissant la fonction Φ d'une manière convenable on arrive au cas où l'évolution du système est définie par des équations différentielles.

---

[1]) *B. Hostinský*: Sur une équation fonctionnelle de la Théorie des probabilités (Publications de la Faculté des Sc. de l'Univ. Masaryk, nº 156). Brno, 1932.

SUR LES FONDEMENTS DE L'ÉCONOMIQUE RATIONNELLE

Par EDOUARD GUILLAUME, Neuchâtel

Présentation d'un ouvrage intitulé *Sur les Fondements de l'Economique rationnelle,* de M. Georges Guillaume, avec une Théorie mathématique de M. Edouard Guillaume. Dans cet ouvrage, les auteurs fondent l'Economique rationnelle sur deux principes:

1⁰ *Le principe de la conservation des masses,* de Lavoisier.

2⁰ Un nouveau principe auquel les auteurs donnent le nom de *principe de la conservation économique de la valeur ou de l'interdépendance universelle des prix de revient.*

Ces deux principes conduisent à deux systèmes d'équations différentielles de la production, qui permettent de déterminer tous les prix de revient en fonction de l'un d'eux pris comme unité : celui de l'or.

On en déduit des relations importantes. Le stock d'or et une fonction exponentielle du temps. Il s'accroît, sur des moyennes de longue durée, à raison composée de 3 % l'an. Pour qu'il y ait équilibre économique, toutes les productions devraient s'accroître suivant le même facteur exponentiel, ce qui est impossible à la longue, d'où des crises plus ou moins périodiques. Pour la majorité des mines d'or, la quantité d'or extraite par tête de mineur et par jour est voisine de 4 grammes. C'est le « salaire brute moyen » d'un mineur, avec lequel non seulement il doit vivre, mais payer son outillage et rémunérer le capital engagé. (Etalon de salaire brute.) A travail égal, les salaires doivent être égaux, pour que l'équilibre subsiste. Dès qu'il y a « disparité », il y a migration d'« hommes-jour » pour rétablir l'équilibre. (Par exemple migration cyclique entre les mines d'or du Transvaal et les cultures du Mozambique.)

M. Georges Guillaume a introduit un système de diagrammes qui mettent en évidence toutes les disparités importantes, particulièrement entre les prix de revient et les cours d'échange. L'ouvrage contient les diagrammes de l'or, du coton et du caoutchouc pour un grand nombre d'années. La concordance des diagrammes avec les crises et les cours cotés en bourses est remarquable. Ils forment un système de prévision.

MATHEMATISCH-TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN UND ASTRONOMIE

ELASTICITÀ LIBERA ED ELASTICITÀ VINCOLATA. APPLICAZIONI DEL CONCETTO DI ELASTICITÀ VINCOLATA

Di ENRICO VOLTERRA, Roma

Accenno ad un nuovo metodo approssimato di studio delle deformazioni dei solidi elastici, che conduce in modo sistematico e semplice alla soluzione di vari problemi di statica elastica. Il metodo che chiamo di „*elasticità vincolata*" si basa su speciali ipotesi, frutto dell' intuizione che in molti casi le deformazioni dei corpi elastici avvengano approssimativamente in modo da escludere alcune deformazioni, come se esistessero speciali vincoli interni. Sono tali vincoli interni che, togliendo una certa libertà al sistema, producono la semplificazione del punto di vista analitico e permettono al calcolo di procedere poi nella maniera la più rigorosa.

Cosi, per riferirci alle più importanti applicazioni pratiche, nel caso di una trave prismatica o di un arco, vige, con approssimazione sufficente da poterlo assumere come vincolo geometrico, un principio di conservazione delle sezioni piane, normali alle generatrici. Basta ammettere tale vincolo, per ridurre il grado di libertà del sistema e semplificare nello stesso tempo la soluzione analitica del problema.

Riferiamo il corpo ad un adatto sistema di cordinate ortogonali, curvilinee o cartesiane, e poniamo le componenti u, v, w dello spostamento sotto la forma:

$$(1) \qquad u = a_1 + a_2 x + a_3 y; \; v = b_1 + b_2 x + b_3 y; \; w = c_1 + c_2 x + c_3 y$$

ove $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ sono nove funzioni della variabile z che si tratta di determinare. Volendo studiare le deformazioni del corpo per spostamenti di una delle estremità, ammettiamo che l'equilibrio interno corrisponda ad una minimo della funzione potenziale. Questo dà luogo a nove equazioni differenziali ordinarie omogenee a coefficienti costanti determinatrici delle nove funzioni incognite nella variabile z.

Volendo studiare le deformazioni del corpo per effetto di forze esterne agenti su di esso, dopo avere espresso le componenti dello spostamento sotto la forma (1) poniamo, come condizioni di equilibrio interno, quella per la quale la variazione della funzione potenziale eguaglia il lavoro delle forze agenti. Si arriva in questo caso ad equazioni differenziali, non piu omogenee, ma con secondo membro.

Nello studio diretto dell' azione di forze concentrate si cadrebbe in formule contenenti elementi infiniti di difficile maneggio analitico. E possibile risolvere anche

questo caso ricorrendo al seguente artificio: supporre ripartito un carico variabile, nullo dappertutto, meno che in un certo tratto che si fa diminuire indefinitamente facendo contemporaneamente crescere in quella regione il carico. Al limite si giunge ad un carico concentrato. Nella soluzione ho cercato di esprimere l'integrale in modo da fare risultare l'azione del carico in un punto, qualunque fosse la sua posizione.

Il metodo esposto, presenta qualche analogia con quello del De Saint-Venant: in uno si parte da ipotesi speciali sulle tensioni, nell' altro da ipotesi speciali sugli spostamenti. Tale ultimo metodo non pretende di raggiungere il grado di perfezione dell' altro, ha tuttavia il grande vantaggio di mettere bene in evidenza fin da principio ciò che è ipotesi e ciò che è calcolo rigoroso.

ZUR STATIK UND DYNAMIK ELASTISCHER PLATTEN

Von HARRY SCHMIDT, Köthen und Leipzig

Unter den bekannten einschränkenden Voraussetzungen reduziert sich die Theorie der statischen Plattenbiegung auf die Behandlung von Randwertaufgaben für die lineare Differentialgleichung

$$\Delta \Delta w = \frac{1}{N} \cdot p(x, y) \text{ bzw. } \frac{1}{N} \cdot p(r, \varphi),$$

wobei w die Durchbiegung, N die Biegungssteifigkeit sowie p die Lastverteilung bedeutet, und wobei die Randbedingungen durch die Stützungsweise des Plattenrandes bestimmt sind. Ist die Belastung zeitlich veränderlich, so haben wir es mit der Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{N}{\varrho} \cdot \Delta \Delta w = \frac{1}{\varrho} \cdot p(x, y, t) \text{ bzw. } \frac{1}{\varrho} \cdot p(r, \varphi, t)$$

zu tun, falls die Trägheitswirkung der Last vernachlässigt und mit ϱ die Plattenmasse pro Flächeneinheit bezeichnet wird; zu den Randbedingungen treten jetzt noch vorgeschriebene Anfangswerte von w und $\frac{\partial w}{\partial t}$ hinzu. Von einigen wenigen elementar lösbaren Spezialfällen abgesehen, ist es bisher üblich gewesen, die Stö-

rungsfunktion p in eine Reihe oder Doppelreihe zu entwickeln oder doch wenigstens partikuläre Integrale der homogenen Gleichung in Reihenform zur Erfüllung der Nebenbedingungen einzuführen. Für die so gefundenen Lösungen muß dann natürlich die Möglichkeit des Auftretens *solcher* Reihen bzw. Doppelreihen durchaus offen bleiben, die lediglich auf den gewählten Lösungsweg zurückzuführen, an sich aber vermeidbar, also durch geschlossene Ausdrücke bzw. einfache Reihen ersetzbar sind. Im Anschluß an frühere Veröffentlichungen habe ich nun eine Methode ausgearbeitet, die bei linearen Rand- und Anfangswertproblemen auf jene sozusagen künstliche Heranziehung irgendwelcher Reihenentwicklungen weitgehend zu verzichten und insbesondere die Gesamtheit aller statischen und dynamischen Biegungsbeanspruchungen von Kreis- und Rechteckplatten auf einheitliche Weise streng zu behandeln erlaubt. Die Grundlage bildet eine sehr umfassende Klasse komplexer Kurvenintegrale, deren Auswertung sich auf Grund einer allgemeinen Beziehung in jedem Einzelfall äußerst einfach gestaltet. Einige typische Anwendungsbeispiele (u. a. die vierseitig eingespannte Rechteckplatte mit rechteckig begrenztem Lastfeld) werden im Vortrag kurz erläutert; eine ausführliche Gesamtdarstellung wird in einer im Verlag von Joh. Ambrosius Barth in Leipzig erscheinenden Monographie „Theorie der Plattenbiegung" gegeben werden.

THE EQUILIBRIUM OF A TOOTH WITH A GENERAL CONICAL ROOT

By Professor J. L. SYNGE, Toronto, Canada

In a paper written recently, and not yet published, I have investigated the equilibrium of a tooth (human or animal) on the assumption that the thin periodontal membrane, which lies between the tooth and the bone, may be treated as an isotropic elastic solid, incompressible but of finite rigidity. In that paper, I have applied the theory to the two-dimensional case and also to the case where the root of the tooth is a solid of revolution. In particular, I have investigated in detail the case where the root is a right-circular cone, and the membrane is of constant thickness.

Roots with circular sections are not, however, usual, for such a tooth would be very weak with respect to forces tending to twist it about its axis. In the present paper there is first given a summary of the results of the general theory, and these are then applied to the case where the root is conical, but not of revolution, and the

membrane is of constant thickness. The problem consists in the determination of (*i*) the displacement experienced by the tooth when given forces are applied to it, and (*ii*) the distribution of pressure throughout the membrane. For a general conical root, the solution of the problem is reduced to the determination of sequences of geometrical constants, whose values depend only on the shape of the conical root.

The theory developed for a general conical root is then applied to the case where the section of the root is an equilateral triangle — an idealisation of the actual section of the root of the human upper central tooth. The geometrical constants are evaluated explicitly, and hence, for this form of section, the problem may be regarded as completely solved.

For a root of any shape, with a membrane of uniform thickness, the pressure p in the membrane satisfies $\Delta p = 12 \mu\beta/h^3$, where Δ is the generalised two-dimensional Laplacian operator on the curved surface of the root, μ is the rigidity of the membrane, β is the normal component of the displacement of the tooth, and h is the thickness of the membrane. The boundary condition is that p shall be equal to the atmospheric pressure at the edge of the membrane. When the root is conical, and its surface therefore developable, the solution of this equation becomes simple when it is assumed that the distance of the edge of the membrane from the apex is constant.

DAS VERHALTEN EINES ROHRES MIT UNREGELMÄSSIGEM KREISQUERSCHNITT BEI EINWIRKUNG EINES KONSTANTEN DRUCKES, WELCHER GLEICHMÄSSIG ÜBER DIE GANZE OBERFLÄCHE DES ROHRES VERTEILT IST

Von TSCHAPLIGIN und ARSCHANIKOFF, Moskau

Das Problem wird in folgender Weise gestellt: wir haben ein Rohr, welches mit zwei exzentrischen Zylindern von den Halbmessern r und r_1 begrenzt ist. Auf dem äußeren Kreis (r_1) herrscht ein konstanter Druck

$$p = \text{Const.}$$

Es wird verlangt, die dabei entstehenden Deformationen zu studieren, welche folgendermaßen lauten:

$$X_x = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1}$$

wobei w die biharmonische Gleichung befriedigt

$$\varDelta \varDelta w = 0 \tag{2}$$

Die Aufgabe wird gelöst unter Zugrundelegung der Neumannschen bipolaren Koordinaten, welche durch folgende Gleichung eingeführt werden:

$$z = x + i y = C \cdot \operatorname{tg} \frac{u}{2}, \quad u = \xi + i \eta. \tag{3}$$

Grenzbedingungen. Es seien X_n, Y_n die Komponenten des Druckes, welcher auf das Flächenelement in Richtung ξ, d. h. normal zum äußeren Kreise wirkt.

1. Auf der inneren Grenze $(\eta = \alpha)$

$$X_n = 0, \quad Y_n = 0.$$

2. Auf der äußeren Grenze $(\eta = \beta)$

$$X_n = -p \cdot \frac{dy}{ds}, \quad Y_n = p \frac{dx}{ds}.$$

Diese Grenzbedingungen können folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} &1.\ w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = \alpha.) \\ &2.\ w = -\frac{p c^2 \cos h \beta}{\cos \xi + \cos h \beta} + k \frac{\sin h \beta}{\cos \xi + \cos h \beta} + n, \\ &\frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{p c^2 \sin h \beta}{\cos \xi + \cos h \beta} + k \frac{\cos h \beta}{\cos \xi + \cos h \beta} - \\ &\quad - (c^2 p \cos h \beta - k \sin h \beta) \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{\cos \xi + \cos h \beta}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

wo k und n ganz willkürliche Größen sind.

Es bleibt solch eine Funktion w zu wählen, welche der Gleichung $\Delta \Delta w = 0$ und den Bedingungen (4) genügen kann. Diese Funktion läßt sich wie folgt ausdrücken:

$$\frac{w}{L} = \frac{\sin h(\alpha - \eta) \{\cos h\alpha \cdot \cos(\alpha - \beta) - \cos h\eta \cdot \cos h(\eta - \beta)\}}{\cos \xi + \cos h\eta} + \sin h(\alpha - \eta) \cos h(\eta - \beta) - (\alpha - \eta) \cos h(\alpha - \beta). \tag{5}$$

Dabei ist die konstante Größe L zu bestimmen.

Der Ausdruck für die Spannung.

Es seien Ξ und Z entsprechend die Spannungskomponenten in normaler und tangentialer Richtung zu den Kreisen $\eta = \text{Const.}$ und H — normal zu den Kreisen $\xi = \text{Const.}$

Dann haben wir:

1. Auf der inneren Grenze $(\eta = \alpha)$

$$\Xi = 0, Z = 0,$$

$$-\frac{H}{p} = 2\frac{(r^2 + r_1^2 - d^2 - 2dr\cos\xi)(r_1^2 - r^2 - d^2 + 2dr\cos\xi)\, r_1^2}{(r^2 + r_1^2)[(r + r_1)^2 - d^2][(r - r_1)^2 - d^2]}, \tag{6}$$

wenn $d = 0$, d. h. im Falle, wenn das Rohr durch zwei konzentrische Zylinder begrenzt ist, erhalten wir die Formel von Lamé

$$-\frac{H}{p} = \frac{2 r_1^2}{r_1^2 - r^2}. \tag{7}$$

2. Auf der äußern Grenze $(\eta = \beta.)$

$$\Xi = -p, \; Z = 0,$$

$$-\frac{H}{p} = 1 + 2\frac{(r_1^2 + r^2 - d^2 + 2dr_1\cos\xi)(r_1^2 - r^2 + d^2 + 2dr_1\cos\xi)\, r^2}{(r^2 + r_1^2)[(r + r_1)^2 - d^2] \cdot [(r - r_1)^2 - d^2]}. \tag{8}$$

NEUERE PROBLEME DER TRAGFLÜGEL-THEORIE

Von I. LOTZ, Göttingen

Die Auftriebsverteilung für Flügel mit beliebigem Umriß und vorgegebener Verwindung zu berechnen, ist eine Aufgabe, die wieder erhöhtes Interesse gewonnen hat. Nachdem nämlich die Untersuchung der anliegenden Strömung um den Tragflügel für die Praxis hinreichend weit gefördert ist, bemüht man sich festzustellen, wann und wo zuerst ein Abreißen der Strömung am Tragflügel zu erwarten ist. Zu diesem Zweck muß man den Verlauf des effektiven Anstellwinkels längs der Spannweite ermitteln.

Die Auftriebsverteilung ist bekanntlich durch eine Integralgleichung bestimmt. Zu ihrer Lösung sind verschiedene Reihenansätze gemacht, die immer auf ein lineares Gleichungssystem führten, dessen Lösung reichlich viel Zeit erforderte. Sobald man aber nicht die vorgegebene längs der Spannweite veränderliche Tiefe bezw. den geometrischen Anstellwinkel selber, sondern eine geeignete Funktion der Tiefe bezw. des Anstellwinkels entwickelt, erhält man nach einigen Umformungen ein iterationsfähiges System. Die Rechnung erlaubt auch ohne wesentliche Mehrarbeit, Flügel mit einer längs der Spannweite veränderlichen Profilkonstante zu behandeln. Bei der Entwicklung der Tiefenfunktion in eine Fourierreihe muß man meist auf eine geschlossene Lösung der Integrale verzichten. Die praktisch vorkommenden Flügelformen gestatten aber oft, die Tiefenfunktion durch Näherungsausdrücke zu ersetzen, die eine bequeme Bestimmung der Koeffizienten erlauben.

Die vorstehenden Untersuchungen ermöglichen aber nur festzustellen, wo das erste Abreißen zu erwarten ist. Die bisherigen Ergebnisse zeigen übrigens eine gute Uebereinstimmung von Theorie und Messung. Ein wesentlich schwierigeres Problem ist die Berechnung der Auftriebsverteilung, wenn schon ein bestimmter Teil des Flügels abgerissene Strömung hat. Ein erster Versuch, derartige Aufgaben zu behandeln, ist von mir für den Fall von Flügeln mit Ausschnitten durchgeführt. Durch einen vorderen Ausschnitt in Flügelmitte z. B. wird die Tiefe des Flügels in diesem Bereich (der Flügelbrücke) erheblich geringer als in den Nachbarteilen. Die Brücke steht dann in dem Aufwind der äußeren Flügelteile, hat im Verhältnis zu den Nachbarteilen große wirksame Anstellwinkel und reißt früh und dann gleich stark ab. Zunächst wurde davon abgesehen, die genaue Auftriebsverteilung, welche zu der gegebenen Flügelform gehört, zu ermitteln. Es wurde vielmehr ähnlich wie bei den älteren Problemen der Tragflügeltheorie die wesentlich einfachere Frage nach den Verhältnissen behandelt, welche den geringsten induzierten Widerstand ergeben.

Unter Berücksichtigung, daß die Strömung um die Brücke und die Strömung um die äußeren Flügelteile verschiedenen Gesetzen gehorchen, kann man eine Aufteilung des Gesamtauftriebes vornehmen. Die Aufgabe wird dadurch reduziert auf die Berechnung des Auftriebs eines Flügels I, dessen Strömung abgerissen ist, und eines Flügels II, eines Flügels mit Lücke, der in dem konstanten Abwind von I steht.

Für die weiteren Fortschritte auf diesem Gebiete ist vor allem ein eingehendes Studium des Uebergangsgebietes, wo abgerissene und nicht abgerissene Strömung aneinandergrenzen, erforderlich. Einige theoretische und experimentelle Arbeiten zur Aufklärung der Vorgänge an dieser Stelle sind im Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung in Göttingen im Gange.

Ausführliche Veröffentlichungen:

I. Lotz, Berechnung der Auftriebsverteilung beliebig geformter Flügel. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1931, S. 189.

I. Lotz, Theorie von Flügeln mit Ausschnitten. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1932, S. 410.

ZUR THEORIE DER WECHSELSTROM-SCHALTUNGEN

Von W. CAUER, Göttingen

Eine für die Elektrotechnik, besonders die Fernmeldetechnik wichtige Frage lautet: Wie kann man zu einer gegebenen *„2n-Pol"*-Schaltung aus „toten" Schaltelementen (Induktivitäten, Ohmschen Widerständen und Kapazitäten) *alle äquivalenten Schaltungen* finden? Zwei 2n-Pole heißen äquivalent, wenn sie bezüglich der n zugänglichen Klemmenpaare für alle Frequenzen $\omega = -i\lambda$ gleiches elektrisches Verhalten zeigen (gleiche charakteristische Matrix $Z(\lambda)$ besitzen, s. u.). Sind Ohmsche Widerstände nicht vorhanden, kennzeichnet man den Aufbau der Schaltung lediglich durch die Induktivitäten L_{st} und reziproken Kapazitäten D_{st} der m unabhängigen Stromkreise (Maschen) und beseitigt durch Zulassung idealer Transformatoren die zwischen der physikalischen Realisierbarkeit der D_{st} und L_{st} bestehende Unsymmetrie, so heißt die Antwort auf obige Frage: Repräsentieren die Matrizen $L = (L_{st})$ und $D = (D_{st})$ die Konstanten der m Stromkreise eines 2n-Pols, dessen n zugängliche Klemmen mit 1, 2, ..., n numeriert sein mögen, und dessen m den kleinsten mit $Z(\lambda)$

verträglichen Wert hat, so erhält man die L'_{st}, D'_{st} äquivalenter Schaltungen und zwar *aller* äquivalenten Schaltungen in der Form

$$L' = T'L^* T, \quad D' = T'D^* T \text{ mit } L^* = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L_1 \end{pmatrix}, \; D^* = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix},$$

worin L_1, D_1 Matrizen beliebiger nicht negativer k-reihiger quadratischer Formen bedeuten ($k \geqq 0$) und T die Matrix einer reellen linearen Substitution der Gestalt

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & \ldots & 0 \; 1 \; 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{n+1,1} & \ldots & \alpha_{n+1,n} & \ldots & \alpha_{n+1,m+k} \\ \alpha_{n+2,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \alpha_{n+2,m+k} \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \alpha_{m+k,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \alpha_{m+k,m+k} \end{vmatrix}$$

ist. Ist $Z(\lambda)$ die charakteristische Matrix des 2n-Poles, d. h. Z^{-1} die n-te Abschnittsmatrix von $(L\lambda + D\lambda^{-1})^{-1}$, so liefert die Partialbruchentwicklung von $Z(\lambda)$ in der Form

$$Z(\lambda) = A_0 \lambda^{-1} + A_\infty \lambda + \Sigma_s \frac{A_s \lambda}{\lambda^2 + \omega_s^2},$$

worin die A_ν Matrizen nicht negativer quadratischer Formen in n Variabeln bedeuten, ein Beispiel einer Schaltung mit kleinstem m. Spezielle äquivalente Schaltungen ergeben sich durch Anwendung des Stieltjesschen Kettenbruchalgorithmus auf die Matrix $Z(\lambda)$.

Mathematisch-technische Wissenschaften und Astronomie

NOTE SUR LA RÉPARTITION DES VITESSES DES CORPS COMÉTAIRES LOINTAINS

Par GEORGES TIERCY, Genève

Soient ϱ la distance périhélie, r la distance qui sépare le soleil du point d'émergence E de la comète, $A = \frac{r}{\varrho}$ le rapport de ces deux distances.

Le nombre r étant très grand (par exemple 40.000 unités astronomiques), et ϱ restant inférieure à 4 pour les corps cométaires *visibles,* on a la condition $a \geq n$, où $n = 10.000$; c'est là ce qu'on peut appeler la *condition de visibilité.*

Si α est l'angle que fait la vitesse v avec le rayon r, on montre que, pour une valeur de ϱ (ou de a) donnée, le domaine des valeurs possibles de α est compris entre $\alpha = 90^0$ et $\alpha = \alpha'$ tel que $\operatorname{tg}^2 \alpha' = \frac{1}{a^2 - 1}$.

Il s'agit ici des arcs lointains des trajectoires, abstraction faite des perturbations ultérieures. On admettra que tous les angles α possibles sont également vraisemblables.

Quant à v, au lieu de faire l'hypothèse de Laplace, on admettra une certaine vitesse relative $v = U$, qu'on pourra appeler *vitesse relative „normale"*, et dont la fréquence serait maximum (par exemple, $U =$ km 0,2 ; cette valeur est suggérée par les observations) ; une autre vitesse relative v aurait alors d'autant moins de probabilité qu'elle s'écarterait davantage de U. La loi de probabilité d'une vitesse v pourrait être représentée par une formule du genre de

$$\varphi(v)\, dv = e^{-g(v-U)^2}\, dv,$$

avec $g = 25$ par exemple; une telle formule donne une courbe de probabilité en forme de cloche.

La conséquence directe de ces hypothèses sur α et v est que le rapport des fréquences relatives des orbites elliptiques et hyperboliques des comètes *visibles* est égal à 1775, avec $U =$ km. 0,2. Il faut remarquer qu'avec $r = 40.000$, les vitesses v correspondant à des ellipses sont $<$ km. 0,22 [1]).

Si l'on avait admis la valeur $U = 10$ km. par exemple pour la vitesse dite „normale", cette valeur appartenant au domaine des hyperboles, la probabilité de voir se réaliser des orbites elliptiques eut été extrêmement minime.

---

[1]) Voir *G. Tiercy,* Quelques remarques sur le problème des comètes; Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. IV, p. 202.

Le choix de U est donc déterminant dans l'hypothèse

$$\varphi(v) = e^{-g(v-U)^2}.$$

Il faut cependant relever qu'en réalité, parmi les comètes visibles observées, les hyperboles sont très rares ; et l'on est fondé à choisir $U =$ km. 0,2. Mais il est évident que le choix de la fonction $\varphi(v)$ reste très arbitraire.

ROTATIONS PERMANENTES DANS UN ASTRE FLUIDE HÉTÉROGÈNE EN ANNEAU

Par PIERRE DIVE, Clermont-Ferrand

Nous cherchons, dans cette étude, à généraliser les travaux de *Laplace,* de Mme *de Kowaleskaya,* de *Maxwell,* et de *Poincaré,* sur l'anneau de Saturne.

Ces savants ont assimilé cet astre à un fluide homogène, animé d'une rotation d'ensemble, et ont pu, dans ces hypothèses, établir l'existence d'une figure d'équilibre annulaire.

Mais on sait que, pour satisfaire à un désideratum de stabilité, *Maxwell* a été conduit à reprendre l'idée de *Cassini* et à considérer l'anneau de Saturne comme formé d'une multitude de grains de poussière cosmique *doués chacun d'une rotation propre.*

Sans nous placer tout d'abord dans le cas spécial de l'anneau de Saturne, nous avons introduit l'hypothèse de l'hétérogénéité et celle de la possibilité de mouvements relatifs des éléments ; tout en conservant la condition de fluidité, nous nous sommes ainsi rapprochés de la conception de *Maxwell.*

Nous envisageons un fluide stratifié en couches de densité constante, infiniment minces, suivant des tores dont les sections méridiennes forment une famille de cercles concentriques. Nous supposons, de plus, que la densité de cette masse décroit d'une manière continue du centre d'une section méridienne jusqu'à sa périphérie.

Dans ces hypothèses, nous établissons l'existence d'un régime permanent de rotations internes capable de maintenir l'anneau fluide dans sa stratification.

ÉTAT LIMITE, RÉSULTANT DES MARÉES, DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME PLANÉTAIRE

Par G. KRALL, Roma

D'après Sir G. Darwin, dans le passé et dans l'avenir des mondes, du système solaire en particulier, les marées ont eu et auront une influence peut-être essentielle. Le premier, il en releva les effets les plus importants, et tira de leur étude systématique d'intéressantes conséquences cosmogoniques.

Dans plusieurs recherches qui sont devenues classiques, non seulement il formula des prévisions sur le plus lointain futur, mais il fit l'histoire, depuis la genèse, de certaines planètes, avec d'intéressantes références à la Terre et à la Lune.

Il se limita toujours, et pour ses buts cela suffisait, au cas de deux corps. Il supposa la masse de l'un, dépassant de beaucoup celle de l'autre, de sorte que l'on pouvait négliger le mouvement du premier corps.

Il parvint ainsi à reconnaître la tendance des orbites elliptiques à devenir des orbites circulaires, et il reconnut que les durées des révolutions tendent à égaler celles de rotation.

Il parvint ensuite à cette dernière conséquence, d'après une suggestion de Lord Kelvin, en tenant compte du fait énergétique que les marées sont accompagnées d'une lente et incessante action dissipative. En vertu de celle-ci, l'énergie totale du système se dégrade en satisfaisant toujours (puisqu'il s'agit de seules actions internes) à l'intégrale des moments, jusqu'à une valeur minimum qui satisfait à la condition d'égalité sus-indiquée. C'est ce qu'il eut à vérifier, en supposant initialement et durant toute l'action dissipative, que l'orbite était circulaire. Il posa même le problème de telle façon que cette hypothèse paraissait essentielle.

Poursuivant dans cette direction il me fut possible, par des extensions faciles, de reconnaître que, dans le mouvement képlérien de deux corps célestes gravitant, dont le rapport des masses est quelconque, et doués chacun de mouvement précessionnel, outre la tendance asymptotique de la trajectoire à devenir circulaire, il arrive que les précessions tendent à devenir des rotations, leurs axes de rotation tendent à se disposer normalement au plan du mouvement. En même temps les vitesses angulaires tendent à égaler les vitesses de révolution.

Une allure si simple du mouvement limite et la facilité avec laquelle il fut possible de la prévoir, faisaient pressentir que, dans le cas des trois corps, on aurait pu parvenir à des résultats également simples.

Il suffit en effet de reconnaître dans l'allure finale du mouvement les traits typiques de certaines solutions dites stationnaires ou de Routh et Levi-Civita. On peut

alors en conclure, sans effectuer de trop longs calculs, que, dans le cas de trois corps gravitants doués chacun de mouvement précessionnel, l'effet des marées tend à orienter le plan du mouvement normalement au moment invariant total de la quantité de mouvement.

Le mouvement orbital tend vers un mouvement Lagrangien, c'est-à-dire, les corps tendent à se disposer aux sommets d'un triangle équilatère, à côtés invariables, tournant avec une vitesse uniforme, autour du centre des masses. Les précessions à leur tour tendent à devenir des rotations, ayant la même vitesse angulaire, et les axes tendent à se disposer normalement au plan du mouvement.

Successivement, en passant au problème général d'un système avec un nombre quelconque de corps, je suis arrivé à reconnaître[1]) que les orbites des corps d'un système planétaire sujet à des marées ou à toute action dissipative interne, tendent vers des circonférences ayant un centre commun, et situées dans un même plan, bien déterminé par les données initiales. Les axes des précessions dégénérantes (rotations) tendent à devenir normales à ce plan. Les durées de ces rotations tendent à égaler la durée de la révolution.

---

[1]) *G. Krall:* Mete lontane del moto di un sistema planetario. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei vol. XV serie 6^a fasc. 8. Roma 1932.

MECHANIK UND MATHEMATISCHE PHYSIK

ABSOLUTE FORM DER FUNDAMENTAL-GLEICHUNGEN DER MECHANIK UNVOLL-KOMMEN BIEGSAMER KONTINUA

Von BRUNO FINZI, Milano

Die vollkommene Biegsamkeit eines Kontinuums ist dadurch gekennzeichnet, daß alle in ihm zu betrachtenden mechanischen Angriffe sich auf einen einzigen Tensor der vom Kontinuum dargestellten Mannigfaltigkeit V_n zurückführen lassen; in einem unvollkommen biegsamen Kontinuum ist dies nicht möglich, da die in ihm auftretenden Kräfte aus einem Tensorpaar bestimmt werden müssen, das einer Mannigfaltigkeit V_m angehört, in der die V_n eingebettet ist, und wovon ein Tensor die örtliche Kraftdichte und der andere die örtliche Momentdichte charakterisiert. Dies gilt in erster Hinsicht für eindimensionale oder zweidimensionale Kontinua, die im Falle vollkommener Biegsamkeit als Saiten, bzw. als Membranen, und im anderen Falle als Stäbe, bzw. als Schalen angesprochen werden. Die dreidimensionalen Kontinua sind in der klassischen Mechanik als vollkommen biegsam betrachtet. Da die vollkommen biegsamen Kontinua gegenüber den unvollkommen biegsamen dadurch ausgezeichnet erscheinen, daß sie in mechanischer Hinsicht durch Tensoren der von ihnen allein dargestellten Mannigfaltigkeit V_n charakterisiert werden können, genießen sie gegenüber den anderen auch die Bevorzugung, daß die mechanischen Gesetze, denen sie unterworfen sind, in absoluter Form dargestellt werden können, d. h. in einer Form, die von dem im Kontinuum gewählten Bezugssystem unabhängig ist.

Dieser Bericht hat zum Ziel, zu zeigen, daß die erwähnte Bevorzugung aufgehoben werden kann und wie auch die Gesetze, denen die unvollkommen biegsamen Kontinua unterliegen, in absoluter Form ausgedrückt werden können. Man erreicht dies dadurch, daß man jeden Tensor n-ter Stufe einer V_m, welcher eine Ortsfunktion der in der V_m eingebetteten V_n ist, durch eine Gruppe von Tensoren charakterisiert, deren Stufe $\leq r$ *ist.* Setzt man z. B. $m = n + 1$, so ist ein Vektor v_ρ der V_m durch einen Vektor u_r der V_n zusammen mit einem Skalar λ bestimmt: $v_\rho \equiv (u_r, \lambda)$; für einen Tensor zweiter Stufe $T_{\rho\sigma}$ der V_m ist die in Betracht kommende Gruppe aus einem Tensor zweiter Stufe u_{rs} der V_n, aus zwei Vektoren λ_r und μ_s, der V_n und aus einem Skalar ν gebildet: $T_{\rho\sigma} \equiv (u_{rs}, \lambda_r, \mu_s, \nu)$; usw. Man kann aber außerdem noch Wesenbegriffe einführen, die auf die Betrachtung der durch $T_{\rho s} \equiv (u_{rs}, \lambda_s)$ dargestellten Größen aufgebaut sind. Für solche, als zusammengehörig zu betrachtende, Tensorgruppen der V_n läßt sich auch die Operation der Ableitung definieren, wenn

zwei quadratische Differentialformen vorgegeben werden, die sich gegenüber jeder beliebigen Koordinatentransformation invariant erhalten. So ist z. B., wenn mit a_{rs} der Fundamentaltensor der ersten Form und mit b_{rs} jener der zweiten Form bezeichnet wird, die Ableitung von $v_\rho \equiv (u_r, \lambda)$ durch $v_{\rho/i} \equiv (u_{r/i} - \lambda\, b_{ri}, \lambda_{/i} + u^t b_{ti})$ gegeben. Auf analoge Weise wird ein absoluter Differentialkalkül im Falle $m > n + 1$ hergestellt.

Mittels dieses Algorithmus gelingt es leicht, die Fundamentalgleichungen der Mechanik der Saiten, sowie der Stäbe, der Membranen, sowie der Schalen in absoluter Form zu schreiben. Z. B. die Gleichgewichtsbedingungen einer Schale, die von Kräften angegriffen ist, deren örtliche Dichte F_ρ ist, werden folgendermaßen geschrieben:

$$T^{/i}_{i\rho} + F_\rho = 0, \qquad \Gamma^{/i}_{i\rho} + E_{\rho i \sigma} T^{i\sigma} = 0.$$

Die Kräfte sind hiebei durch $T_{i\rho}$ und die Momente durch $\Gamma_{i\rho}$ vertreten. Setzt man in diesen Gleichungen $\Gamma_{i\rho} = 0$, so erhält man daraus die Gleichgewichtsbedingungen einer Membran.

ABSOLUTE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN DER MECHANIK

Von ALEXANDER WUNDHEILER, Warschau

1. Es existiert bisher eigentlich keine Theorie der rheonomen Systeme. Für ein solches sind zwei durch

$$\bar{q}^i = \bar{q}^i (q^k, t)\,, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{1}$$

verbundene Parametersysteme q^i, $\bar{q}^i$ durchaus gleichberechtigt, eine intrinseke mechanische Bedeutung können also nur die Invarianten der Gruppe (1) haben. Dasselbe gilt m. m. von den nichtholonomen Systemen. Für ein solches haben einen mechanischen Sinn nur die Bildungen, die sich der Gruppe

$$d\bar{q}^i = a^i_k\, dq^k \tag{2}$$

gegenüber invariant verhalten. Vereinigung der beiden Standpunkte führt zur Erkenntnis, daß als *absolute mechanische Größen* Tensoren zu bezeichnen sind, die sich auch unter

$$d\bar{x}^i = a^i_k\, dx^k + \omega^i dt \tag{3}$$

immer noch so transformieren, wie bei $\omega^i = 0$. Wir nennen sie starke Tensoren (z. B. $\frac{\partial f}{\partial x^i}$; dagegen ist dx^i kein starker Vektor). Als *absolute Mechanik* bezeichnen wir die in der Sprache der absoluten mechanischen Größen formulierte Mechanik.

2. Die *absoluten Bewegungsgleichungen* für ein *beliebiges rheo-nichtholonomes System* sind

$$\frac{\delta v_i}{dt} + W_{ik} v^k + S_i = Q_i. \tag{4}$$

Erklärung der Bezeichnungen: $2T = a_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + \alpha_i \dot{x}^i + A$ ist die lebendige Kraft des Systems. Die Bildungen

$$v_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}, \; a_{ik}, \; \mathcal{D} = A - a^{ik} \alpha_i \alpha_k, \; (a^{ij} a_{jk} = \delta^i_k = {}^1_0), \tag{5}$$

erweisen sich als starke Tensoren, wir nennen sie bzw. „Längsgeschwindigkeit", „Fundamentaltensor" und „Querenergie". Wir führen noch die Größen

$$W_{ik} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x^i} - 2\alpha_j \left\{{}^{\;j}_{ik}\right\}\right], \quad S_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x^i} \tag{6}$$

ein, die wir „Dehnungstensor" und „absolute Zentrifugalkraft" nennen. Q_i sind die verallgemeinerten Kraftkomponenten. Endlich ist das starke kovariante Differential δ durch

$$\delta v = d v_i - \left\{{}^{\;j}_{ik}\right\} v_j dx^k - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x^i}\right) v^k dt \tag{7}$$

definiert. Für nichtholonome Systeme sind entsprechende Ergänzungen vorzunehmen, die wir wegen Raummangel nicht anführen können. Alle eingeführten Größen lassen sich anschaulich deuten und spielen außerdem eine fundamentale Rolle in der „rheonomen" Geometrie sich deformierender Räume.

3. Skleronomitätsbedingung muß (3) gegenüber invariant sein (Unabhängigkeit von der Zeit zu fordern ist offenbar zu viel). Es zeigt sich, daß sie folgendermaßen lautet:

$$W_{iu} = 0; \; \mathcal{D} = 0 \tag{8}$$

Wir erhalten in denselben Termini die absoluten Holonomitätsbedingungen, die Bedingungen für die Existenz eines „Energieintegrals" für rheonome Systeme (im wesentlichen $W = 0$). Glch. (4) führen außerdem zu einer vernünftigen Klassifikation der dynamischen Systeme ($W = 0$, $\delta = 0$).

BEGRÜNDUNG DER DYNAMIK OHNE VIRTUELLE VERSCHIEBUNGEN

Von EDGAR B. SCHIELDROP, Oslo

Es seien

$$(1) \qquad \sum a_{ik}\,\ddot{x}_i = c_k \qquad \left\{\begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots, h \\ i = 1, 2, \ldots, 3n \end{array}\right\}$$

die h nicht-homogene Gleichungen, die zwischen den Beschleunigungen eines materiellen Systems von n Punkten bestehen. Bewegt sich das System in einem kraftfreien Feld, so sind nötigerweise gewisse Beschleunigungen vorhanden, die (1) erfüllen. Aeußere Kräfte führen *Aenderungen* der Beschleunigungen herbei, und diese müssen

$$(2) \qquad \sum a_{ik}\,\ddot{y}_i = 0$$

erfüllen. Zu diesen Gleichungen, die auch die der virtuellen Verschiebungen sind, gelangt man hier in sehr natürlicher Weise auch im allgemeinsten, rheonomen Fall.

Liegt nun ein Kraftsystem, Y_i, vor, wo die Beschleunigungen

$$\ddot{y}_i = \frac{Y_i}{m_i}$$

von vornherein die Gleichungen (2) erfüllen, so wird es sicher als eine sehr natürliche Annahme gefühlt, wenn man behauptet, daß in diesem Fall diese Beschleunigungen auch tatsächlich hervorgerufen werden. Durch die Annahme, daß solche *tangierende* Kraftsysteme ihre Wirkung ganz ungestört hervorrufen, gelangt die Reibungslosigkeit der Führungen zum Ausdruck. Durch Weiterverfolgung dieses Gedankenganges wird man beinahe zwangmäßig zu folgender *Erweiterung des Trägheitsprinzipes* geführt: Beim Fehlen äußerer Kräfte ist die Bewegung *tangential* unbeschleunigt. Das heißt: die Beschleunigungen, $\ddot{z}_i$, gehören im kraftfreien Fall *keinem* der Tangentialsysteme (2). Die notwendige Orthogonalitätsbedingung muß massengeometrisch hingeschrieben werden, und es muß deshalb

$$\sum m_i\,\ddot{z}_i\,\ddot{y}_i = 0$$

verlangt werden für sämtliche $\ddot{y}_i$ die (2) erfüllen. Da die $\ddot{z}_i$ auch (1) erfüllen müs-

sen, sind sie eindeutig festgelegt. Wenn nun ein willkürliches, äußeres Kraftsystem hinzukommt, kann an diesen orthogonalen Beschleunigungen nichts geändert werden. Es muß deshalb das Kraftsystem, X_i, in einen orthogonalen, unwirksamen Bestandteil, Z_i, und in ein Tangentialsystem, Y_i, zerlegt werden. Diese Zerlegung geschieht eindeutig, und dadurch werden die Tangentialbeschleunigungen

$$\ddot{y}_i = \frac{Y_i}{m_i}$$

und weiter die Gesamtbeschleunigungen

$$\ddot{x}_i = \ddot{y}_i + \ddot{z}_i$$

bestimmt.

Durch den skizzierten Aufbau gelangt man, wie ich meine, zu einer Dynamik der allgemeinsten Punktsysteme, die als eine sehr natürliche Verallgemeinerung der Mechanik des freien Punktes und der einfachen Systeme hervortritt, und die nur mit den elementaren Vorstellungen der klassischen Kraftmechanik arbeitet.

IMPORTANCE DE LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE POUR LA DÉDUCTION DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MÉCANIQUE

Par GODOFREDO GARCIA, Lima

L'équation qui représente l'aire et la figure du parallélogramme est

(1) $$C = \chi \times e_r + \chi \wedge e_r$$

dans laquelle χ est le vecteur unitaire (versor) fondamental, e_r le nombre qui mesure l'espace relatif, C est une expression analogue au quaternion de W. Hamilton.

L'équation vectorial définie par

(2) $$e - o = \chi \wedge e_r$$

par dérivations successives, comme nous l'avons fait connaître, nous conduit à l'équation suivant la notation symbolique de Leibnitz,

(3) $$U^{(n)} = \sum_{i=r}^{i=a} [\chi + U_i]^{(n)} + U_0^{(n)}$$

qui est l'équation fondamentale de la Mécanique Rationnelle.

Dans la antérieur

$$U_a = \omega \wedge \int U_r \, dt$$

U peut représenter la quantité de mouvement, ou le moment de quantité de mouvement, déduisant les deux équations cardinales.

Les équations universelles sont

(4) $$U_{x\mu}^{(n)} = \sum_{i=r}^{i=a} [\chi_{x\mu} + U_{ix\mu}]^{(n)} + U_{ox\mu}^{(n)} \quad \mu = 1, 2, 3$$

Si e_r est fonction du temps t, par intermédiaire de $(e - o)$

(5) $$\frac{de_r}{dt} = \frac{de_r}{d(e-o)} \; \frac{d(e-o)}{dt}.$$

Multipliant par la masse

(6) $$\frac{dU_r}{dt} = \frac{de_r}{d(e-o)} \; \frac{d(U-U_o)}{dt} + \frac{d^2 e_r}{d(e-o)^2} (U - U_o)(V - v)$$

V est la vélocité du point o.

Dans l'équation

(7) $$e_r = \chi \wedge (e - o)$$

(8) $$\chi = \sum_1^2{}_h \chi_h .$$

χ_1 est le vecteur unitaire (versor) selon la tangente et χ_2 le versor selon la binormale à la courbe gauche.

Le théorème de Poisson

(9) $$\frac{d\chi_h}{dt} = \chi_h \wedge \omega_h \quad h = 1, 2$$

ω_h représente les vélocités angulaires.

En plus nous savons que

$$\text{sen}\, \beta_h\, d(e_h - 0) = e_r\, d\alpha_h \qquad h = 1, 2 \tag{10}$$

β_1 est l'angle du rayon vecteur avec la tangente; β_2 est l'angle du rayon vecteur avec la binormale;
$d\alpha_h$ pour $h = 1.2$ sont les angles qui forment les deux tangentes et les deux binormales infinitement proches.

Dérivant l'équation (7) et tenant présent les équations (9) et (10) elle se réduit à

$$\frac{de_r}{d(e_h - 0)} = \chi_h \qquad h = 1, 2 \tag{11}$$

Passons à déterminer les courbures par flexion et par torsion.

Les courbes indicatrices qui correspondent aux versors.

χ_h pour $h = 1.2$ nous conduisent aux équations

$$\chi_h = \mu_h \wedge (\chi_{rh} - 0_1) \qquad h = 1, 2 \tag{12}$$

dans lesquelles μ_h sont de nouveaux versors selon la tangente et la normale principale, on déduit que

$$\frac{d\chi_h}{d(\chi_{rh} - 0_1)} = \mu_h \qquad h = 1, 2. \tag{13}$$

Appelant au versor déterminé par

$$\mu_h \wedge (\chi_{rh} - 0_1) = \chi_{h+1} \qquad h = 1, 2 \tag{14}$$

on obtient

$$\frac{d^2 e_r}{d(e_h - 0)^2} = \chi_{h+1} \wedge \frac{\text{sen}\, \beta_h}{e_r} \qquad h = 1, 2. \tag{15}$$

Quand $\beta_h = 90^0$ pour $h = 1$ $e_r = \varrho_1 =$ rayon de courbure par flexion, pour $h = 2$ $e_r = \varrho_2 =$ rayon de courbure par torsion.

Pourtant les courbures seront

(16) $$\frac{d^2 e_r}{d(e_h - o)^2} = \frac{\chi_{h+1}}{\varrho_h} \qquad h = 1, 2$$

la courbure totale sera $\sum_1^2{}_h \frac{\chi_{h+1}}{\varrho_h}$ remplaçant dans la (6)

(17) $$\frac{dU_r}{dt} = \sum_1^2{}_h \chi_h \cdot \frac{d(U - U_0)}{dt} + \sum_1^2{}_h \frac{\chi_{h+1}}{\varrho_h} (U - U_0)(V - v)$$

Si o est fixe $V = 0 \quad U_0 = 0$.

Ceci est notre théorème général qui termine la force totale ou le moment résultant dans la théorie du mouvement curviligne.

Si nous faisons $\chi_2 = 0 \quad V = 0 \quad U_0 = 0$

(18) $$\frac{dU_r}{dt} = \chi_1 \frac{dU}{dt} + \frac{\chi_3}{\varrho_1} Uv$$

élevant au carré et tenant présent que $\chi_1^2 = 1 \quad \chi_3^2 = 1 \quad \chi_1 \times \chi_3 = 0$

(19) $$\left(\frac{dU_r}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dU}{dt}\right)^2 + \left(\frac{Uv}{\varrho_1}\right)^2$$

Quand U_r et U représentent les quantités de mouvement $U_r = mv_r$, $U = mv$

(20) $$\left(\frac{d\,mv_r}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\,mv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{mv^2}{\rho_1}\right)^2$$

qui est le fameux théorème de Huygens.

FUNDAMENTAL PROBLEMS OF THE NON LINEAR MECHANICS

By NICOLAS KRYLOFF and NICOLAS BOGOLIÙBOFF, Kieff (Ukraine)

In the treatment of the different types of vibrations physicists and engineers ordinarily reduce the problem to the study of so-called Linear Vibrations, that is of the vibrations governed by the linear differential equations. This fact is due especially to a great development of the theory of linear differential equations which

not only possess an adequate mathematical apparatus (Heaviside's Operational Calculus), but also furnishes some general qualitative properties of integrals giving rise to the usual notions (proper and forced oscillations, proper frequency, resonance etc.) of the linear theory.

The detailed study of the really existing vibrating systems clearly shows nevertheless that the most part of them are in fact *non linear* and therefore the juste mentioned notions ought to be completely revised and correspondingly modified.

This work was undertaken by the authors of the present paper who have studied the problem both from qualitative and quantitative aspects and contributed therefore to the foundation of the *Non Linear Mechanics* conceived as the Science of the general properties of the non linear vibrations (independently of their special significance in different branches of Physics and Engineering). One part of the results of the authors concerning the some problems of Radio-Engineering was summarised in three successive communications to the French Academy of Sciences[1]) and in one recent paper: "Les problèmes fondamentaux de la Mécanique non linéaire" (Revue générale des Sciences pures et appliquées, 1932).

The researches of the authors are concerned principally with the so-called (in Radio-Engineering) vibrating systems of Thomson's type.

One of the most distinguished characteristic properties of such a system is the remarkable constancy of the frequencies of the vibrations in these systems which is hardly influenced with the external agencies.

The systems of Thomson's type are of frequent use in different branches of Physics and Radio-Engineering. The well-known triode oscillator (whose principal function is the transformation of the energy of constant current into the energy of the alternating current of a given constant frequency) gives a typical example of such a system in Radio-Engineering.

Generally speaking, the vibrations excited in these Thomson's systems are also connected ordinarily with the transition of the energy from one state to the other.

It is to be noted that the amplitudes of the "proper" vibrations of the Thomson's systems in a free state (without external periodic forces) are not the arbitrary constants of integration (as in the "linear case") but can take only certain discret "quantised" values determined from a certain well defined equation and under certain conditions these spontaneous "quasi-discontinous" jumps from one quantised value to the other are allowed.

Particularly interesting and instructive is the behaviour of Thomson's systems when the external periodic forces are applied.

[1]) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1932.

In this "forced" state besides the *heteroperiodic* regimes (only with the frequencies of the external forces) which are analogous to the forced vibrations of the "linear theory" may existe the regimes which can be called *autoperiodic* regimes and where appear also the "proper" frequencies.

The "proper" frequency presents itself as a sum of a fundamental term,—linear frequency (depending only from proper parameters of the system) and a term of a "fine structure" influenced by the external forces.

This last term gives rise to some interesting physical phenomena, as for example the phenomenon of demultiplication: *when the linear frequency varies in the interval*

$$\left(\frac{n}{m} \alpha - l_{n,m}, \frac{n}{m} \alpha + l_{n,m} \right) .$$

(where α the frequency of the external force, n and m positive integers and $l_{n,m}$ are relative small quantities calculated for the triode oscillator by the authors in the above mentioned papers by the means of the analysis sufficiently complicated), *then the total proper frequency is kept constant and equal to* $\frac{n}{m}\alpha$.

This phenomenon is especially important for $n = 1$, $m = 2, 3 \ldots$

Under certain conditions the heteroperiodic regimes are going instable and then the autoperiodic regime establishes itself automatically.

The authors have studied in detail these conditions of "self-excitation" and they have shown that, when the linear frequency is in the neighbourhood of $(h + 1/2)\alpha$, then the system present extremely favourable conditions for the appearance of the proper vibrations and even in the systems, where in the free state the proper vibrations were amortised, may subsiste nevertheless the stable autoperiodic regime. This fact of the extreme favourableness for the appearance of autoperiodic regimes (regimes of the proper vibrations) can be conveniently utilised for many technical purposes, as for example for the demultiplication of the frequency of an alternating current and even for the establishing of a new kind of electrical generators, a design of which were calculated by the authors. All these results, here summarised were obtained by the authors by the means of some adequate *symbolic new methods of Non Linear Mechanics* which conveniently generalise the Heaviside's Operational Calculus for the non linear problems. The researches of the authors are detailed in one monogroph (consecrated to the new methods in the domain of the Non Linear Mechanics) which will be published in the near future.

SUR UNE FORME NOUVELLE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME MATÉRIEL ARBITRAIRE. APPLICATIONS

Par ANTOINE BILIMOVITCH, Belgrade

A chaque système matériel S de masses m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ aux vitesse $\vec{v}_i$, au moment donné, on peut faire correspondre un espace auxiliaire S^* de l'état cinématique suivant. Soit à chaque moment donné l'espace S^* invariablement lié avec un système matériel fictif que nous allons désigner aussi par S^*. Ce système matériel fictif consiste en mêmes points matériels m_i aux mêmes positions que dans le système donné, mais les vitesses $\vec{v}_i^*$ de ces points matériels correspondent à la distribution des vitesses d'un corps solide et remplissent les conditions suivantes :

$$\text{(1)} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{v}_i - \vec{v}_i^*\right)^2 = \text{Min.}}$$

Pour le corps solide nous posons

$$\boxed{\vec{v}_i^* = \vec{v}_c^* + \left[\vec{\Omega}, \vec{\varrho}_i\right]}$$

où $\vec{v}_c^*$ est la vitesse du centre d'inertie du système fictif, $\vec{\Omega}$ la vitesse angulaire du corps solide, $\vec{\varrho}_i$ radius vecteur du point m_i par rapport au centre d'inertie.

Ceci posé, nous obtenons de la condition de l'extremum (1) deux équations pour la détermination des vecteurs $\vec{v}_c$ et $\vec{\Omega}$ sous la forme suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}_c^* &= \vec{v}_c, \\ \vec{G}^{(c)*} &= \vec{G}^{(c)}, \end{aligned}}$$

où $\vec{v}_c$ est la vitesse du centre d'inertie du système S et $\vec{G}^{(c)}$ et $\vec{G}^{(c)*}$ les moments des quantités du mouvement du système donné et fictif par rapport à leur centre d'inertie commun. La deuxième équation donne la possibilité de déterminer à chaque moment donné la vitesse angulaire de l'espace auxiliaire S^*.

Après cela nous pouvons décomposer le mouvement de chaque système matériel en deux mouvements : mouvement de l'espace S^* par rapport à l'espace immobile et mouvement des points du système S par rapport à l'espace S^*.

Pour déterminer la translation et la rotation de l'espace S^* de même que le mou-

vement relatif des points du système S par rapport au S^* nous pouvons écrire les équations différentielles suivantes :

$$M\dot{v}_c^* = \vec{R},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{T}, \vec{\Omega}\right) = \vec{L},$$

$$m_i \dot{u}_i + m_i\left[\dot{\Omega}, \vec{\varrho_i}\right] + 2m_i\left[\vec{\Omega}, \vec{u_i}\right] + m_i\left[\vec{\Omega}\left[\vec{\Omega}, \vec{\varrho_i}\right]\right] = \vec{R_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

où M désigne la masse totale du système, $\vec{R}$ la résultante de forces extérieures, t le temps, $\boldsymbol{T}$ le tenseur d'inertie du système, $\vec{L}$ le moment résultant de forces extérieures, $\vec{u_i}$ la vitesse relative de ce point par rapport à l'espace S^*, $\vec{R_i}$ la force pour le point m_i. Le point au-dessus d'une lettre désigne la dérivation vectorielle par rapport au temps.

Nous avons donné [1]) quelques applications de l'analyse exposée du mouvement d'un système matériel. On peut utiliser les résultats de cette méthode avec succès pour traiter le mouvement des systèmes peu différents d'un système invariable.

Ici, je me permettrai d'indiquer une nouvelle application de méthode exposée. Nous prenons un système matériel tout à fait arbitraire et traitons les conditions nécessaires pour que le système ait le mouvement de rotation en bloc. En d'autres termes, nous traitons les conditions des résolutions particulières $\vec{\varrho_i} =$ Const. dans leurs mouvements relatifs. Comme dans ce cas $\vec{u_i} = 0$, $\dot{u}_i = 0$, les équations différentielles du mouvement par rapport au centre d'inertie prennent la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(T, \vec{\Omega}\right) = 0,$$

$$m_i\left[\dot{\Omega}, \vec{\varrho_i}\right] + m_i\left[\vec{\Omega}\left[\vec{\Omega}, \vec{\varrho_i}\right]\right] = \vec{R_i}; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Nous nous bornons au cas où la force ne dépend que de la position relative des points.

Le vecteur $\dot{\Omega}$ étant éliminé des équations écrites, nous obtenons le système des équations ne contenant que le vecteur $\vec{\Omega}$ et les constantes.

L'analyse en détail donne pour résultat que le vecteur $\vec{\Omega}$ doit être constant dans l'espace du système ainsi que dans l'espace immobile.

---

1) I. Über den Begriff der Erdachse. Gerlands Beiträge (Köppenheft) 1931.
II. Sur le mouvement d'un système matériel peu différent d'un corps solide. Belgrade 1931.
III. Sur la possibilité du mouvement séculaire du pôle terrestre. Belgrade 1932.

Ce résultat obtenu, suivant les discussions de P. Appell, dans notre cas général, d'un système matériel tout à fait arbitraire, nous retrouvons la condition nécessaire bien connue pour les systèmes solides et ayant des parties fluides pour la rotation en bloc de ces systèmes.

SUL POSTULATO FONDAMENTALE DELLA STATICA

Di GIOVANNI GIORGI, Roma

Per dare un fondamento fisico rigoroso alla Dinamica, e affinchè la legge sperimentale $F = mj$ non si riduca a una definizione, ritengo necessario che la teoria matematica delle forze venga sviluppata previamente, senza riferimento a fenomeni di moto.

Assumo come nozione primitiva il *filo teso*, identificabile per mezzo di un campione che si può supporre conservato negli Archivi, e definisco come filo avente la tensione N, uno che equivalga a N fili identici al campione, agenti in parallelo[1]). Indi definisco: „*Forza singola agente su un corpo è qualunque azione fisica i cui effetti meccanici (cioè sulla quiete e sul moto del corpo* relativamente a qualunque piattaforma estranea; o sullo stato fisico interno del corpo) *equivalgano a quelli di un filo teso applicato a un certo punto del corpo.*" Ne segue l'identificazione degli elementi matematici di una forza. Enuncio allora questo *postulato fondamentale:* „*Ogni possibile variazione di condizioni fisiche in un sistema di corpi equivale sempre a un sistema di forze singole, definibili e misurabili per confronto col filo teso campione.*"

Per questa via si definiscono le forze singole ΔF provenienti da singole azioni fisiche, non mai la forza totale agente su un corpo; ritengo che la definizione di questa ultima sia, in tutto o in parte, convenzionale, perchè dipende da convenzioni arbitrarie caratterizzare lo stato nullo delle forze. Ma la nozione è sufficiente per edificare la Dinamica, sulla base della seconda legge di Newton nella forma $\Delta F = m \Delta j$, lasciando alla legge d'inerzia il suo carattere convenzionale.

Come fondamenti della Statica faccio seguire la definizione di equilibrio delle forze (completamente indipendente da quella di quiete), e i postulati sull' equilibrio. Lo sviluppo ulteriore della Statica si ottiene aggiungendo i postulati speciali propri agli enti che si considerano nei singoli capitoli (punti materiali liberi, solidi rigidi liberi, vincoli tipici, solidi deformabili, etc.); gran parte di questi si possono conglobare, come è noto, nel principio dei lavori virtuali.

[1]) Questo sviluppo è diverso da quello della „scuola del filo" die Reech e Andrade.

LES THÉORIES DE LA MÉCANIQUE A LA LUMIÈRE DE LA CRITIQUE

Par G. CASAZZA, Milan

On connaît la controverse qui eut lieu au commencement du siècle passé au sujet du travail (W) d'une masse (m) en mouvement, suscitée par Leibnitz lequel trouva son principal opposileur en Descartes.

La dispute paraîssait être interminable, lorsque d'Alembert y intervint pour arrêter que les deux partis avaient tous deux raison, sauf que les uns considéraient les forces (F) agissant comme les espaces (L), les autres comme les temps (T). C'est évident qu'il y a là une méprise, puisque la dispute consistait précisément à décider si les forces (F) naturelles agissent comme les temps (T) ou comme les espaces (L).

Dans le premier cas c'étaient les cartésiens qui avaient raison ; tandis que dans le deuxième les partisans de Leibnitz l'emportaient et les deux partis ne pouvaient avoir raison tous les deux à la fois. En effet, seulement les cartésiens avaient évidemment raison. Cela est d'autant plus vrai que, même de nos jours, la physique affirme que la gravité dans la chute agit comme les temps (T) [dans l'acsension... comme les espaces (L)]. — Il s'en suivit un tas d'absurdités et de valeurs hétérogènes contradictoires ; c'est-à-dire les valeurs qui sont les fonctions de l'espace (L) et, par conséquent, l'absurdité scandaleuse de conserver la quantité de mouvement autant que la force vive. Première conséquence :

a) Je transcris : « Un projectile, pesant une tonne, lancé à la vitesse de m. 500, quel travail possède-t-il ? ... » — « Presque de 13 millions de kgm. » répond l'auteur (Polagi). Un susdit projectile, réduit au poids de un kg. de la même impulsion, atteindra une vitesse 1000 fois plus grande, et une énergie s'élevant à 13 billions de kgm.

b) De n'importe quelle force (F) on peut obtenir un travail (W) indéfini, en baissant indéfiniment la masse

$$m\,V^2 = m'\,V'^2 = \text{travail } (W)$$

$$m\,V^2 = \frac{m}{2}\,(2\,V')^2 = 2\,W$$

$$m\,V^2 = \frac{m}{3}\,(3\,V')^2 = 3\,W \text{ etc.}$$

c) Que l'on suppose que la masse (M) tombe d'un mètre par seconde ; la force absorbée est donc d'un mètre, tandis que celle qui paraît dans le système est de m. 4,90 ! Il fallait remplacer l'unité de temps (T) par l'unité d'espace (mètre). C'est

toute la physique des forces que l'on aurait dû réformer, tandis que rien n'a été changé.

d) En effet, on ose écrire : (je transcris) « Quel est l'effet du courant d'un fleuve large de m. 90 et profond de m. 1,80 à la vitesse de 1 m. ? » Solution : $\frac{PV^2}{2g} = 9194$ kgm.

Mais, de grâce, $\frac{PV^2}{2g}$ n'est-elle pas la même de $PH = PL$, c'est-à-dire n'indique-t-elle point le poids élevé verticalement à la hauteur H ? Mais la question est posée pour P se mouvant dans la direction horizontale.

LE MOUVEMENT GYROSCOPIQUE DES PROJECTILES STABLES

Par ROBERT D'ADHÉMAR, Lambersart

La notion d'axe dynamique d'équilibre, introduite par M. Esclangon, est inspirée par une intuition puissante, et elle constitue, je crois, le terme de la théorie dont M. de Sparre a posé les fondements dans son mémoire publié en 1904. Ce mémoire de 1904 est fondamental, par le fait que M. de Sparre a mis la solution de l'équation différentielle du mouvement gyroscopique sous la forme d'une somme, le premier terme étant une solution particulière approchée, et le second terme contenant des exponentielles $e^{i\varphi(t)}$.

Ce mémoire a été repris et complété par M. de Sparre, en 1923 et en 1927, et par M. Charbonnier, en 1927, par l'introduction de ce que l'on nomme l'effet Garnier. Ce n'est pas un effet physique. M. Maurice Garnier a simplement demandé une plus grande précision dans l'établissement de l'équation.

C'est, au contraire, un effet physique qu'a introduit M. Esclangon lorsqu'il a attaché une importance primordiale aux frottements latéraux. Il est utile de compléter les équations de M. Esclangon, en introduisant l'effet Garnier, et M. Sugot l'a fait avec habileté.

Mais cela n'a pas grande importance, au point de vue des idées fondamentales que M. Esclangon a voulu mettre en relief. La notion d'axe dynamique d'équilibre, qu'il a introduite, conserve toute sa valeur abstraite, quels que soient les effets

physiques qui peuvent se produire, et cette notion est même indépendante, comme méthode, de l'effet Garnier.

L'axe instantané de précession et l'axe dynamique d'équilibre sont des droites passant par le centre de gravité, et je nomme centre instantané de précession et centre dynamique d'équilibre les traces de ces droites sur un plan qui est perpendiculaire sur la tangente, à une distance du centre de gravité égale à un. Soit a la trace de l'axe du projectile sur ce plan ; représentons a par la variable complexe z.

L'equation du mouvement gyroscopique sera, avec des approximations valables si $|z|$ est assez petit :

$$\frac{dz}{dt} = (A - iP)z + |\tau'| . \tag{1}$$

Le centre instantané de précession $\mathfrak{P}$ est un point défini par la variable complexe u donnée par l'équation finie :

$$o = (A - iP)u + |\tau'| . \tag{2}$$

Le terme d'amortissement est A ; P représente une vitesse angulaire de précession, et $|\tau'$ représente la vitesse angulaire d'abaissement de la tangente.

La connaissance du point $\mathfrak{P}$ donne des indications sur le mouvement gyroscopique, mais l'étude n'est pas achevée ; il faut introduire le centre dynamique d'équilibre, qui est une solution particulière de (1).

Je modifie un peu la conception de M. Esclangon, qui repose sur le *prolongement à l'infini* de la trajectoire, et qui, par suite, demande une discussion délicate. Je substitue, au centre dynamique d'équilibre, un point voisin Γ, défini par une solution particulière de (1), passant par celui des points $\mathfrak{P}$ qui est *le plus éloigné de l'origine*. Cette solution particulière ζ joue, à peu près, le même rôle que la solution particulière de M. Esclangon, mais elle paraît plus maniable. La discussion du voisinage des points $\mathfrak{P}$ et Γ est intéressante.

Grâce à l'emploi de cette solution ζ, on peut obtenir une plus grande précision.

Et cela me permet de retrouver et de compléter ce que j'ai dit antérieurement, relativement au passage, pour le mouvement pendulaire, de la forme *oscillatoire* à la forme *révolutive* autour de la tangente de la trajectoire.

DAS HAUPTPROBLEM DER ÄUSSEREN BALLISTIK IM LICHTE DER MODERNEN MATHEMATIK

Par KYRILLE POPOFF, Sofia

Je présente au Congrès l'ouvrage que je viens de publier à Leipzig sous le titre ci-dessus. *Bernoulli, d'Alambert, Legendre* et *Gauss* ont posé les problèmes de la Balistique et tâché de les résoudre par les moyens de l'époque. On a d'abord recherché des formes analytiques de la fonction de résistance qui conduisent à l'intégration des équations du mouvement d'un point dans un milieu résistant par un nombre fini de quadratures. Cette question a trouvé récemment sa solution définitive dans les travaux de *Jules Drach* qui, en généralisant les idées de Galois, forme toutes les fonctions de résistance conduisant à la solution par un nombre fini de quadratures. A ces recherches, nous consacrons le chapitre II de l'ouvrage.

L'intégration des équations de la Balistique dans les conditions physiques du problème ne peut être effectuée que par des séries infinies. Les intégrales peuvent être considérées comme fonction de la variable indépendante et développées suivant les puissances de leurs accroissements ; elles peuvent être étudiées aussi comme fonctions des paramètres qui figurent dans les équations différentielles et les conditions initiales et qui ont une signification physique, géométrique ou analytique. Ce dernier point de vue adopté dans la Mécanique Céleste et développé par Poincaré a été négligé par les balisticiens. Nous montrons l'intérêt théorique et pratique qu'on ait à se placer à ce point de vue.

Considérons d'abord l'équation de l'hodographe qui est de la forme :

$$d \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} = f\left(u, \ 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}\right) du.$$

On l'a étudiée jusqu'à présent en s'inspirant des idées de *Cauchy* et en développant $\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}$ suivant les puissances de u ou bien u suivant les puissances de $\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}$. En introduisant un paramètre λ, nous considérons l'équation généralisée

$$d \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} = f\left(u, \ 1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}\right) du$$

et étudions $\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}$ comme fonction de λ, ce qui conduit à la série

$$\operatorname{tg} \frac{\tau}{2} = \varphi_0(u) + \lambda^2 \varphi_2(u) + \lambda^4 \varphi_4(u) + \ \ldots$$

Les coefficients $\varphi_i\,(u)$ sont des fonctions holomorphes de u qui s'obtiennent par des quadratures. L'étude de la convergence de cette série est étroitement liée à la recherche des points singuliers λ_ϱ de l'équation de l'hodographe. Ces points sont des fonctions de u et, dans le cas où u ne prend que des valeurs réelles, décrivent des lignes dans le plan du paramètre complexe λ, lesquelles, pour des valeurs finies et réelles du temps, ne coupent pas l'axe réel du plan λ. Par conséquent, on peut délimiter dans le plan de λ un domaine contenant le segment réel $(-1, +1)$. La transformation conforme de ce domaine sur un cercle du plan μ permet d'obtenir des séries, convergentes pour toutes les valeurs du temps d'un intervalle arbitrairement choisi $(0, T)$ et qui, pour la valeur de μ correspondante à $\lambda = 1$ donne la solution du problème balistique.

On peut aller plus loin en rapportant les équations du mouvement à un système d'axes y, z dont l'axe des y est dirigé suivant la verticale en bas et l'axe des z suivant la vitesse initiale v_0. Les équations du mouvement seront dans ce cas de la forme :

$$\frac{dy'}{dt} = g - y'\,f(v), \quad \frac{dz'}{dt} = -z'\,f(v), \quad v = \sqrt{(y'+z')^2 - 4y'z'\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

avec les conditions initiales $t = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y' = 0$, $z' = v_0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$, où α est l'angle de projection.

Les intégrales y', z', y, z sont des fonctions holomorphes de $\sin^2\frac{\varphi}{2}$ et peuvent être développées suivant les puissances croissantes de $\sin^2\frac{\varphi}{2}$. On a ainsi

$$y = y_0(t) + y_1(t)\sin^2\frac{\varphi}{2} + y_2(t)\sin^4\frac{\varphi}{2} + y_3(t)\sin^6\frac{\varphi}{2} + \ldots, \text{ etc.}$$

où $y_i(t)$, $z_i(t)$ sont des fonctions holomorphes de t qu'on calcule successivement par des quadratures. Si l'on ne donne à t que des valeurs réelles, les points singuliers $\sin^2\frac{\varphi_\varrho}{2}$ des séries ci-dessus seront des fonctions d'un paramètre et décriront dans le plan du paramètre complexe $\sin\frac{\varphi}{2}$, pour t positif et fini, des lignes qui ne coupent pas l'axe réel entre $\sin\frac{\varphi}{2} = -1$ et $\sin\frac{\varphi}{2} = +1$. Par une transformation conforme du plan de $\sin\frac{\varphi}{2}$ on arrive à des séries convergentes pour toutes les valeurs de t de

l'intervalle arbitraire $(o, T > o)$. Nous montrons que la convergence de ces séries est très rapide.

On étudie par les mêmes méthodes le mouvement dans un milieu à résistance variable par l'altitude.

L'étude de la convergence des séries balistiques étant au centre de ces considérations, une grande partie de l'ouvrage est consacrée à l'étude des points singuliers des intégrales suivant les méthodes suivies par Briot et Bouquet, H. Poincaré, E. Picard, Ivar Bendixson et d'autres.

THE MECHANICS OF THE STABILITY OF A CENTRAL ORBIT

By OLIVER E. GLENN, Lansdowne, U. S. A.

This article is based upon the hypothesis that a mechanical automatism which is the final result of inorganic evolutionary action in nature, will possess the power of self-restitution in opposition to small disturbances tending to disrupt it. Central orbits are examples of such automatisms; (Herbert Spencer; A. Berthoud).

Let C be a segment of the stable orbit. The restitutional action is represented by a set of polar transformations each of which carries a curve of the field of perturbed orbits, surrounding C, into C. A theory of invariants of these transformations leads to a determination of all central force functions, $F(r)$, the orbits for which remain stable after small perturbations by extraneous forces. A general formula is,—

$$F(r) = \frac{\gamma^2 \lambda^2}{r^3}\left[\frac{2p(r)^2}{r^2} - \frac{p(r)p'(r)}{r} + \frac{1}{\lambda^2}\right], \quad (p(r) = ar^{n-1} + br^{n-2} + \ldots + k).$$

The law of inverse squares of Newton is a particular case.

The zone of asteroids illustrates Bohr's Theory of stationary states: That is, the zone is found to be limited in respect to the minimum sizes of its constituents, and in its position in the solar system, by the gravitational laws. A stable asteroid in solitary motion upon a nearly circular orbit, must have a mass greater than a determinate lower limit.

LES APPARENCES DE DISCONTINUITÉ OU D'IRRÉGULARITÉ EN DYNAMIQUE

Par ED. HUSSON, Nancy

Les équations de la mécanique, prises sous la forme de Lagrange, constituent un système linéaire par rapport aux dérivées secondes, et le déterminant de ce système est le discriminant de la forme quadratique, force vive, 2 T.

Le discriminant est nul pour les positions d'indétermination de la représentation paramétrique, et ces positions d'indétermination apparaissent comme des discontinuités du 2º ordre, ou des irrégularités, du système différentiel du mouvement.

L'irrégularité est une apparence au point de vue physique si on peut choisir de nouveaux paramètres ne présentant pas la singularité.

La solution unique, correspondant à des conditions initiales fixées, est régulière ou irrégulière par rapport aux anciens paramètres. On peut parfois l'obtenir en cherchant une solution régulière ou d'un type fonctionnel choisi.

Cette particularité se présente pour tous les problèmes intégrables par quadratures.

La toupie de Lagrange donne l'exemple type le plus simple, lorsque l'on prend comme paramètres les angles d'Euler, la position initiale de l'axe étant verticale.

On rencontre des questions analogues d'irrégularité en cherchant les solutions approchées d'un système dynamique en utilisant le Th. de Poincaré sur les solutions d'un système différentiel dépendant d'un paramètre λ, très petit, et, en regardant les conditions d'application du Th. de Poincaré comme constituant le cas régulier.

Si l'on prend une toupie de Lagrange animée à l'instant initial d'une rotation propre de vitesse angulaire très grande ω, l'inclinaison de l'axe sur la verticale est donnée par l'équation du second ordre :

$$A^2 \sin\theta . \frac{d^2\theta}{dt^2} = A P l \sin^2\theta - C^2\omega^2 (\cos\theta_0 - \cos\theta)(1 - \cos\theta_0\cos\theta + \cos^2\theta)$$

En prenant comme paramètre petit $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$, l'équation résolue par rapport à la dérivée seconde admet le point $\lambda = 0$ comme pôle et est irrégulière pour le Th. de Poincaré.

On régularise par homothétie sur le temps, en prenant ωt, comme temps auxiliaire et on applique le développement de Poincaré.

L'homothétie sur le temps permet de trouver de la façon la plus simple toutes les

trajectoires approchées à grande vitesse, et avec la sécurité donnée par le Th. de Poincaré.

Si l'on provoque des perturbations dans le mouvement d'un système en ajoutant une masse très petite ou de faible inertie λ et dont la position dépend d'un ou plusieurs paramètres relatifs, le discriminant de la force vive s'annule pour $\lambda = 0$, et on obtient une nouvelle catégorie d'applications pour lesquelles la perturbation est à période très courte dans les cas elliptiques.

ÜBER DIE STABILITÄT DER COUETTE-STRÖMUNG

Von H. SCHLICHTING, Göttingen
(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung, Göttingen)

Der folgende kurze Beitrag zur Theorie der Turbulenzentstehung gibt mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen eine Stabilitätsuntersuchung der Couette-Strömung, also derjenigen ebenen Laminarströmung zwischen zwei parallelen ebenen Wänden, die entsteht, wenn die eine Wand ruht und die andere mit konstanter Geschwindigkeit U_m in tangentieller Richtung bewegt wird. Dabei ist im stationären Zustand die Geschwindigkeit $U = U(y)$ eine lineare Funktion des Wandabstandes y. Der zu untersuchenden Laminarströmung wird eine Störungsbewegung überlagert, deren Partialschwingung die Stromfunktion $\varphi(y)\, e^{i(\alpha x - \beta t)} = \varphi(y)\, e^{i\alpha(x - ct)}$ besitzt. $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ ist die Wellenlänge der Störung; der Realteil von β gibt die Kreisfrequenz, der Imaginärteil von β die Anfachung oder Dämpfung der Schwingung, je nachdem ob positiv oder negativ. Wegen $c = \frac{\beta}{\alpha}$ ist der Realteil von c gleich der Phasengeschwindigkeit der Störung. Als Störungsdifferentialgleichung erhält man in dimensionsloser Schreibweise

$$(1) \qquad (U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = -\frac{i}{\alpha R}(\varphi'''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi),$$

wobei R die mit der maximalen Geschwindigkeit und einer charakteristischen Breite des Laminarprofils gebildete Reynoldssche Zahl bedeutet. Die Randbedingungen sind $\varphi = \varphi' = 0$ an den beiden Wänden, d. i. für $y = 0$ und $y = s$.

Im Gegensatz zum Experiment ist nach den Untersuchungen früherer Autoren[1]) das Couette-Profil für alle Reynoldsschen Zahlen und für alle Störungswellenlängen stabil. Nach einem Vorschlag von Prof. Prandtl kann man jedoch zu einer kritischen Reynoldsschen Zahl für diese Strömung gelangen, indem man die Turbulenzentstehung als einen Anlaufeffekt auffaßt, d. h., es wird der Stabilitätsuntersuchung nicht die ausgebildete stationäre Laminarströmung zugrunde gelegt, sondern diejenigen Geschwindigkeitsprofile, die nacheinander entstehen, wenn die eine Wand aus der Ruhe heraus sehr plötzlich in konstante Geschwindigkeit versetzt wird (Abb. 1).

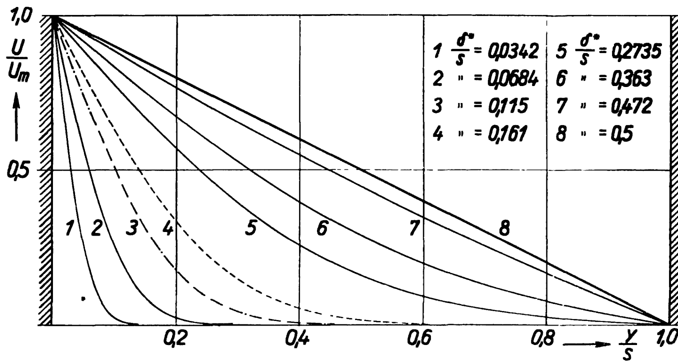


Abb. 1. Die neuzeitliche Entwicklung der Grenzschicht:
(—·—·— Profil mit der niedrigsten Stabilitätsgrenze)
(— -- — letztes instabiles Profil).

Die Durchführung der Rechnung schließt sich an die Untersuchungen von Prandtl[2]), Tietjens[3]) und Tollmien[4]) an. Man beschränkt sich auf die Diskussion derjenigen Störungen, die gerade an der Grenze zwischen Stabilität und Labilität liegen (c rein reell). Für große Reynoldssche Zahlen R läßt sich die allgemeine Lösung der Störungsgleichung fast im ganzen Bereich der Strömung durch die Integrale der reibungslosen Gleichung

$$\varphi'' - \alpha^2 \varphi - \frac{U''}{U - c} \varphi = 0 \tag{2}$$

darstellen. Nur an der Stelle $U = c$ wird das vollständige Störungsproblem durch

[1]) *A. Sommerfeld:* Atti d. IV congr. int. dei Mathem. Rom 1909.
R v. Mises: Heinrich Weber Festschrift 1912.
Derselbe: Jahresber. d. deutschen Math. Ver. 1912.
L. Hopf: Annalen der Physik 44, 1, 1914.

[2]) *L. Prandtl:* Zs. f. angew. Math. u. Mech. I, S. 431, 1921.

[3]) *O. Tietjens:* Zs. f. angew. Math. u. Mech. V, S. 200, 1925.

[4]) *W. Tollmien:* Göttinger Nachrichten, S. 21, 1929.

das reibungslose nicht mehr angenähert; hier besitzt die allgemeine Lösung der Gleichung (2) eine Singularität. Man kann deshalb die Lösung des Randwertproblems erst durchführen, wenn man unter Annahme einer kleinen Reibung mit Hilfe der vollständigen Differentialgleichung (1) das Verhalten der Lösungen an dieser Stelle noch besonders untersucht. Dadurch erhält man weitere grenzschichtartige Lösungen, die nur in einer kleinen Umgebung der „kritischen" Schicht $U = c$ von Einfluß sind.

Die Durchführung der Rechnung führt zu dem Resultat, daß die Stabilitätsgrenze mit wachsendem $\frac{\delta^*}{s}$ ansteigt ($\delta^* = \frac{1}{U_m}\int_0^s U\,dy =$ Verdrängungsdicke des Profils). Für $\frac{\delta^*}{s} = 0$ findet man als kritische Reynoldssche Zahl $R_k = \left(\frac{U_m \delta^*}{\nu}\right)_k = 1{,}53 \cdot 10^3$; für alle Profile mit $0 \leqq \frac{\delta^*}{s} < 0{,}161$ ergibt sich ein bestimmtes R_k, während für $\frac{\delta^*}{s} \geqq 0{,}161$ alle Profile durchaus stabil sind ($R_k = \infty$). Die kritische Reynoldssche Zahl der Couette- Strömung ist gegeben durch die niedrigste Stabilitätsgrenze während des Anlaufens. Bildet man die kritischen Zahlen mit dem Abstand s der beiden Wände, so erhält man für $\frac{\delta^*}{s} = 0{,}115$ als Minimum $\left(\frac{U_m s}{\nu}\right)_k = 19300$. Dies ist also nach unserer Rechnung die kritische Reynoldssche Zahl der Couette-Strömung (Abb. 2).

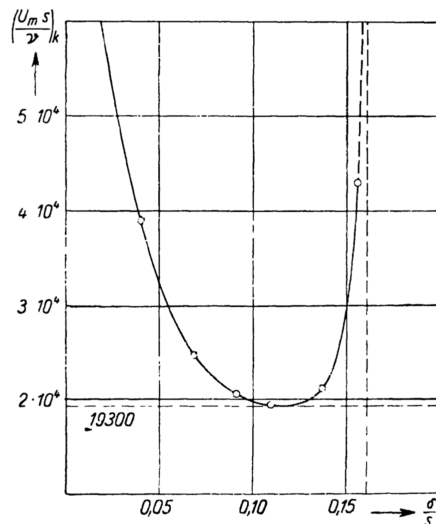


Abb. 2. Die kritische Reynoldssche Zahl $\left(\frac{U_m s}{\nu}\right)_k$ als Funktion von $\frac{\delta^*}{s}$.

SUR LA NOTION DE FORCE EN MÉCANIQUE

Par S. ZAREMBA, Cracovie

Dans cette communication, je me propose simplement d'expliciter une notion que l'on fait ordinairement intervenir d'une façon implicite en mécanique des corps continus.

D'après la conception ordinaire de la notion de force, une force a un point d'application, une direction et une intensité déterminée. En mécanique des corps continus, la conception précédente de la notion de force ne suffit pas. En effet, considérons par exemple un corps pesant ; il est évident que le siège de la pesanteur de ce corps se confond avec l'ensemble de tous ses points. Considérons en second lieu un solide (C) plongé dans un liquide ; la pression du liquide sur le solide (C) est un effet dont le siège est constitué par la surface de ce corps. Il convient donc d'envisager en même temps que des forces dont chacune a un point d'application unique et que nous appellerons *forces concentrées,* des forces ayant une infinité de points d'application et que nous appellerons *forces non concentrées.* Pour que ces dernières puissent intervenir dans des théories déductives, il est indispensable d'admettre à leur sujet un système convenable de postulats. Pour énoncer ces postulats, nous admettrons les définitions suivantes :

1º Un système de forces sera dit *statiquement neutre* si, après solidification de l'ensemble de ses points d'application, ce système de forces devient un système de forces se faisant équilibre.

2º Deux systèmes de forces (S_1) et (S_2) seront dits *statiquement équivalents* s'il existe un troisième système de forces (S) tel que chacun des deux systèmes de forces $(S) + (S_1)$ et $(S) + (S_2)$ soit statiquement neutre.

Voici maintenant les postulats auxquels les forces non concentrées seront supposées satisfaire.

I. — Il correspond à toute force non concentrée F un système fini (S) de forces concentrées statiquement équivalent à cette force.

II. — Lorsque deux systèmes finis de forces concentrées sont chacun statiquement équivalents à une même force non concentrée, ils sont statiquement équivalents entre eux.

III. — A toute division de l'ensemble (E) des points d'application d'une force non concentrée F en deux ensembles infinis (E_1) et (E_2), il correspond une décomposition parfaitement déterminée de la force F en deux forces non concentrées F_1 et F_2 dont les ensembles des points d'application coïncident respectivement avec les ensembles

(E_1) et (E_2) et, si l'on désigne alors par (S_1) et (S_2) deux systèmes finis de forces concentrées, respectivement équivalents aux forces F_1 et F_2, le système $(S_1) + (S_2)$ sera statiquement équivalent à la force F.

En s'appuyant sur les postulats précédents, on établira d'une façon réellement rigoureuse les résultats classiques de la mécanique des corps continus.

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Par M. AKIMOFF, Léningrade

En généralisant le problème résolu par Catalan (Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ire série, t. 11, p. 212), on est conduit à chercher de telles surfaces *dépolies* passant par l'hélice donnée avec l'axe vertical, qu'un point pesant parcourc cette hélice, lorsqu'on le pose sur la surface en un point de cette courbe et qu'on lui imprime une vitesse convenable.

L'axe des z étant une verticale, l'équation cherchée, en coordonnées cylindriques, de la surface passant par l'hélice

$$r = r_0,\ z - z_0 = a\,\varphi$$

sera de la forme

$$z - z_0 = a\,\varphi + (r - r_0)\, f\,(r_0, \varphi) + (r - r_0)^2 f_1\,(r, \varphi),$$

où $a = r_0 \operatorname{tg} \alpha$, α désigne l'angle avec le plan horizontal de la tangente à l'hélice, $f\,(r_0, \varphi)$ est une fonction à déterminer et $f_1\,(r, \varphi)$ reste arbitraire, ne devenant pas infinie pour $r = r_0$.

On déduit des équations générales du mouvement considéré les équations suivantes qui résolvent le problème

$$v = \sqrt{g\, r_0\, f(r_0, \varphi)}$$

et

$$\frac{d\,f\,(r_0, \varphi)}{d\,\varphi} = -\,2\left(\operatorname{tg} \alpha - k\,\sqrt{1 + \cos^2 \alpha\,[f(r_0, \varphi)]^2}\right), \tag{1}$$

g étant le poids du mobile (r_0, φ, z), v sa vitesse et k le coefficient du frottement.

La discussion de ces dernières équations est immédiate.

1. Pour $k = 0$, on retrouve les surfaces de Catalan (loc. cit.).
2. Pour $k \neq 0$, la surface correspondante la plus simple est la surface réglée

$$z - z_0 = a\varphi + (r - r_0)\, f(r_0, \varphi).$$

Si $k < \operatorname{tg}\alpha$ et $\varphi \to -\infty$, la solution générale $f(r_0, \varphi)$ de l'équation (1) a pour limite la valeur constante b, déterminée par l'équation

(2) $$\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1 + \cos^2\alpha \cdot b^2} = 0;$$

si $k > \operatorname{tg}\alpha$, b est 0.

3. Le cas le plus important pour les applications est celui des surfaces hélicoïdales (séparateurs spirals)

(3) $$z = a\varphi + f(r).$$

La condition (2), où $b = f'(r_0)$, étant supposé ici remplie, le mouvement considéré sur la surface (3) se produit avec la vitesse constante

$$v_0 = \sqrt{g\, r_0 f'(r_0)}$$

et reste stable, si $f'(r_0) + r_0 f''(r_0) > 0$.

(Le cas de $f(r) = br$ a été considéré dans ma note au « Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik », Bd. 11 (1931), p. 74.)

SUR LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN

Par C. P. PAPAÏOANNOU, Athènes

I. Les équations

(1) $$Z = A + z e^{i\theta}$$

(2) $$f(\theta, A) = 0$$

où θ est à considérer comme la variable indépendante, définissent le mouvement du plan mobile $P_m(z)$ dans le plan fixe $P_f(Z)$. Formons l'équation

$$Z^{(n)} = \frac{d^n Z}{d\theta^n} = \frac{d^n A}{d\theta^n} + z e^{i\left(\theta + n\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Elle fait correspondre à un point z du plan mobile un point $Z^{(n)}$ du plan fixe et réciproquement. Soit $I_n(z)$ le point du plan mobile correspondant à l'origine du plan fixe. On appelle ce point centre instantané géométrique d'ordre n.

D'après la définition même, on calculera son affixe dans le plan mobile par l'équation

$$\frac{d^n A}{d\theta^n} + z_n e^{i(\theta + n\frac{\pi}{2})} = 0$$

d'où l'on tire

(3) $$z_n = \frac{d^n A}{d\theta^n} e^{i(\pi - \theta - n\frac{\pi}{2})}.$$

La formule (1) s'écrit pour $z = z_n$

(4) $$Z_n = A + \frac{d^n A}{d\theta^n} e^{i(\pi - n\frac{\pi}{2})}.$$

Désignons par C_n le lieu géométrique des centres instantanés d'ordre n relatifs à chaque position du plan mobile. Le système (4), (2) forme évidemment les équations de cette courbe.

Appelons k_n le lieu des points du plan mobile devenant des centres instantanés d'ordre n pendant les diverses phases du mouvement ; nous aurons comme équations de la courbe k_n les (3), (2).

II. Dérivons l'équation (4) k fois consécutivement par rapport à θ ; on obtient

(5) $$\frac{d^k Z_n}{d\theta^k} = \frac{d^k A}{d\theta^k} + \frac{d^{n+k} A}{d\theta^{n+k}} e^{i(\pi - n\frac{\pi}{2})}$$

d'un autre côté, l'affixe du point I_{n+k} est, d'après la formule (4)

(6) $$Z_{n+k} = A + \frac{d^{n+k} A}{d\theta^{n+k}} e^{i(\pi - n\frac{\pi}{2} - k\frac{\pi}{2})}.$$

En tenant compte des équations (5) et (6) on trouvera

(7) $$\frac{d^k}{d\theta^k}(Z_n - A) = (Z_{n+k} - A) e^{ik\frac{\pi}{2}}$$

Cette formule établit une relation entre les vecteurs $0\,I_{n+k}$ et

$$\frac{d^k}{d\theta^k}(0\,I_n);$$

ces vecteurs ont leurs modules égaux :

l'angle de ces vecteurs est égal à o, $\frac{\pi}{2}$, π, $3\frac{\pi}{2}$ suivant le nombre k.

Remplaçons maintenant à l'expression (4) n par k et adjoignons à cette expression l'équation (7); on trouve sans difficulté

$$(Z_{n+k} - Z_k)\, e^{ik\frac{\pi}{2}} = \frac{d^k Z_n}{d\theta^k} \tag{8}$$

Faisons quelques remarques relatives à cette formule :

Soit d'abord $k = 1$. On retrouve ainsi un théorème dû à N. Nicolaïdès (Théorie du mouvement d'une figure plane, Athènes, éd. Bibl. Nationale, 1869), qu'on peut énoncer comme suit :

La droite $I_1 I_{n+1}$ qui joint le centre instantané du premier ordre au centre instantané d'ordre $(n + 1)$ est dirigée normalement à la courbe C_n.

Nous allons maintenant chercher les mouvements plans dans lesquels le centre instantané de k ordre et le centre instantané d'ordre $n + k$ coïncident.

L'équation (8) qui se réduit alors à

$$\frac{d^k Z_n}{d\theta^k} = 0$$

fournira l'affixe du point Z_n

$$Z_n = \frac{L_{k-1}}{(k-1)!}\theta^{k-1} + \frac{L_{k-2}}{(k-2)!}\theta^{k-2} + \ldots\ldots + L_0$$

L étant des constantes imaginaires.

L'équation (4) s'écrit ainsi :

$$\frac{d^n A}{d\theta^n} e^{i\left(\pi - n\frac{\pi}{2}\right)} + A = \frac{L_{k-1}}{(k-1)!}\theta^{k-1} + \ldots\ldots + L_0$$

ce qui est l'équation différentielle qui exprime le problème. Si l'on traite le cas particulier où $k = 1$, $n = 1$, on se trouve amené à l'équation

$$i\frac{dA}{d\theta} + A = L_0$$

d'où résultent les mouvements cherchés

$$Z = A + \varsigma e^{i\theta}$$

$$A = Re^{i\theta} + L_0$$

qui sont les rotations du plan P_m.

SUR LES PERTURBATIONS DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES D'UN SYSTÈME À PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTÉ

Par J. HAAG, Besançon

1. Soit un système à n degrés de liberté, placé dans un champ de forces tel que les équations différentielles du mouvement soient

$$q_i'' + m_i^2 q_i = 0.$$

Le mouvement le plus général résulte de la superposition de n *vibrations pures*.

Aux forces précédentes, ajoutons des *forces perturbatrices* très petites et soit f_i l'accélération perturbatrice de la variable q_i. On peut aisément déterminer les conditions initiales pour lesquelles *le mouvement est périodique en seconde approximation*. La *perturbation de période* est alors donnée par la formule

$$\Delta T = \frac{1}{m_1^3 Q_1} \int_0^{2\pi} f_1 \cos \varphi_1 \, d\varphi_1, \qquad \varphi_1 = m_1 t; \tag{1}$$

en supposant que les équations du mouvement sont, en première approximation,

$$q_1 = Q_1 \cos \varphi_1, \qquad q_i = 0 \text{ pour } i > 1.$$

On a une formule analogue, un peu plus compliquée, quand les variables q_i ne sont pas canoniques.

2. Considérons maintenant un système soumis à des forces dérivant de la fonction U et supposons que le système soit en équilibre stable quand les q_i sont nuls. En première approximation, les petits mouvements sont analogues à ceux du numéro précédent. Pour calculer la perturbation de période provenant de la seconde approximation, on peut procéder comme il suit. *On calcule l'énergie cinétique et la fonction de forces en tenant compte de toutes les liaisons qui existent, en première approximation, dans la vibration pure considérée. On écrit l'équation de Lagrange relative au seul paramètre restant ; on en déduit l'accélération perturbatrice et l'on applique la formule (1).*

Une application intéressante de cette méthode peut être faite au *double pendule*.

3. *Quand deux périodes sont égales,* soit par exemple $m_1 = m_2$, on a des *battements* entre les variables q_1 et q_2. Chaque point du système est le siège d'une *vibration*

elliptique tournante, que l'on peut étudier, en première et en seconde approximations, par les équations de Lagrange. L'application de cette méthode au *pendule sphérique* permet d'établir très simplement les résultats classiques concernant la durée d'une révolution et la vitesse de rotation de l'ellipse décrite approximativement par le pendule.

SUR LE PRINCIPE D'HAMILTON DANS LE CAS DES LIAISONS NON HOLONOMES

Par Z. HORÁK, Prague

Pour déduire du principe d'Hamilton les équations correctes du mouvement d'un système à n paramètres x^ν, soumis aux liaisons non holonomes (et scléronomes)

$$(1) \qquad \overset{K}{\underset{\nu}{\Phi}} \dot{x}^\nu = 0 \text{ [1]}, \quad K = 1, 2, \dots n - m,$$

il faut supposer, comme on sait, que les variations vérifient les relations

$$(2) \qquad \overset{K}{\underset{\nu}{\Phi}} \delta x^\nu = 0,$$

tandis que les trajectoires variées ne peuvent pas satisfaire en général aux liaisons, les deux symboles d et δ supposés être *permutables* bien entendu.

Dans cette communication, je fais voir que, si l'on rejette la dernière supposition et si l'on calcule les expressions $\delta \dot{x}^\nu - \frac{d\delta x^\nu}{dt}$ en différentiant les équations (1), (2), on peut envisager la trajectoire réelle du système comme solution du problème suivant : *Trouver les n fonctions $x^\nu(t)$, remplissant les conditions* (1) *et telles que*

$$\int (\delta T + X_\nu \delta x^\nu)\, dt = 0$$

pour toutes les variations qui s'annulent aux limites (T désigne la demi-force vive, X_ν les forces généralisées).

On tire d'abord de (1) et (2) les n-m relations

$$(3) \qquad \Phi_\nu^K \left(\delta \dot{x}^\nu - \frac{d\delta x^\nu}{dt} \right) = \left(\frac{\partial \Phi_\nu^K}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu^K}{\partial x^\nu} \right) \dot{x}^\mu \delta x^\nu ,$$

[1]) Je supprime les chiffres de sommation.

de sorte qu'on peut prescrire aux n quantités $\delta \dot{x}^\nu - \frac{d\delta x^\nu}{dt}$ encore m conditions, p. ex. celles qui découlent de l'exigence, que l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\nu}\left(\delta \dot{x}^\nu - \frac{d\delta x^\nu}{dt}\right) = 0 \tag{4}$$

doit être vérifiée pour n'importe quelle configuration et vitesse initiales [1]). Cela fait, notre problème se traduit par l'équation :

$$\int \left\{ \delta T + X_\nu \delta x^\nu + \delta \left(\lambda_K \Phi^K_\nu \dot{x}^\nu\right) \right\} dt = 0 .$$

Mais les relations (3) donnent

$$\delta \left(\Phi^K_\nu \dot{x}^\nu\right) = \frac{d}{dt}\left(\Phi^K_\nu \delta x^\nu\right)$$

ce qui entraîne

$$\int \left\{ \frac{\partial T}{\partial x^\nu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\nu}\right) + X_\nu - \frac{d\lambda_K}{dt} \Phi^K_\nu \right\} \delta x^\nu \, dt = 0 .$$

Donc en posant $\frac{d\lambda_K}{dt} = -\Lambda_K$, on arrive aux équations du mouvement sous leur forme habituelle. De plus, on s'assure aisément que, en vertu de (3), les trajectoires variées satisfont aux liaisons.

Les raisonnements ci-dessus s'appliquent également à la déduction des équations des géodésiques dans l'espace riemannien non holonome.

STABILITÉ RELATIVE

Par L. FÉRAUD, Genève

Les études de stabilité au voisinage d'un point d'équilibre mettent en évidence un cas „critique" introduit d'abord dans la théorie du *centre* posé ensuite en toute généralité par celle de la stabilité *complète*. C'est celui où l'approximation se fait le mieux

[1]) Cf. Z. Horák, C. R. Acad. Sc. Paris, 188 (1929) p. 614—616.
Les relations (3), (4) admettent une interprétation simple en géométrie riemannienne non holonome.

— des petites oscillations approchées de tous ordres se présentent d'elles-mêmes — mais où, par contre, le problème final de stabilité échappe continuellement à l'analyse: d'un intérêt mécanique autant qu'analytique, il relie la recherche des mouvements périodiques à celle des mouvements stables [1]). En fin de compte, une question de convergence sur tout l'axe des t reste ouverte ; en d'autres termes, en se plaçant dans les hypothèses de stabilité complète, il reste à décider quant à la stabilité permanente.

Lemme. — Soit un système d'équations différentielles à seconds membres réels et analytiques, dans le voisinage d'un point d'équilibre ordinaire et (1) $\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i + X_i$ $\delta(X_i) \geq 2$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ la forme préliminaire sous laquelle il est classique de l'écrire ; en faisant sur les exposants caractéristiques l'hypothèse

$$m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 - \lambda_j \neq 0 \qquad (j = 3, \ldots n)$$

m_1, m_2 entiers positifs quelconques, on peut déterminer des développements f_j tels que le changement de variables $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_j = y_j + f_j\,(y_1\, y_2)$ transforme (1) en un système de même type dans lequel $Y_j\,(y_1, y_2, 0, \ldots 0) = 0$.

Théorème d'existence. — *Si l'on adjoint aux hypothèses de ce Lemme la condition de Liapounoff relative aux exposants* λ_1, λ_2, *pour* $n = 3$, *le développement unique* $f_3(x_1 x_2)$ *converge au voisinage du point considéré.*

Par sa signification mécanique, ce résultat apporte une contribution à la théorie des trajectoires réelles de la dynamique (Cf. Poincaré, J[al] de Liouville, 1886) [2]). D'un point de vue plus général, il doit être regardé comme une conclusion de *stabilité relative:* notion, définie par une voie plus directe dans un Mémoire précédent (J[al] de Math. 1932, fasc. 2) qui, en effet, implique essentiellement la considération et la recherche de variétés invariantes *privilégiées:* surfaces invariantes de périodicité $(n = 2)$; variétés invariantes stables $(n > 2)$.

En comparant avec la théorie *générale* [3]) des fonctions définies par des systèmes différentiels et remarquant l'analogie des procédés analytiques, on est conduit à développer une théorie de la stabilité relative qui participe à la fois des deux points de vue fondamentaux pour lesquels sont ci-dessus rappelées les idées directrices et les références les plus caractéristiques.

---

[1]) Poincaré, Painlevé, Horn, Birkhoff, Wintner, Hagihara.

[2]) Le cas auquel se rapporte notre théorème correspond à la «cinquième hypothèse» de Poincaré (Ch. XVI)

[3]) dans laquelle, au contraire, l'hypothèse de Liapounoff est exclue; voir, à ce point de vue: Briot et Bouquet, Poincaré (thèse), Picard, Horn, Dulac, Birkhoff, Malmquist, Bamforth.

SUR UN PROBLÈME CONCERNANT LA THÉORIE DE L'AILE D'ENVERGURE FINIE

Par J. PÉRÈS, Paris, et L. MALAVARD, Marseille

Il s'agit de la solution numérique de l'équation intégrale qui donne la circulation le long d'une aile d'envergure finie, dont les caractéristiques sont connues ; cette équation est :

$$(1) \qquad \frac{1}{4\pi V}\int_{-b}^{+b}\frac{d\Gamma}{d\xi}\,\frac{d\xi}{\xi-x}=\frac{\Gamma(x)}{c_1\,V t(x)}-\alpha(x)$$

où $\Gamma(x)$ est la circulation inconnue, les autres quantités données ($t(x)$: profondeur, $\alpha(x)$ angle d'attaque dans la section d'abscisse x). Notre méthode procède de l'analogie entre les équations de l'hydrodynamique plane et celles de la répartition d'un courant électrique plan.

Soit le bassin électrique contenant sous une épaisseur uniforme un liquide conducteur. L'un des bords du bassin (axe Ox) porte des électrodes E, deux d'entre elles $(-\infty, -b)$, $(+b, +\infty)$ dont le potentiel est pris pour zéro ; les autres entre $-b$ et $+b$; si ces dernières sont portées aux potentiels $-\frac{1}{2}\Gamma(x)$, on voit aisément (influence des autres bords négligeable) que l'intégrale de (1) est proportionnelle à l'intensité de courant qui sort au point considéré. Dans ces conditions un calcul montre que, si l'on cherche à vérifier en moyenne l'équation (1) pour chaque électrode, on est conduit à :

$$(2) \qquad I_n=\frac{\varphi_n-\overline{\varphi}_n}{R_n}$$

I_n: intensité de courant, φ_n: potentiel de l'électrode dont le numéro d'ordre est n, avec les données

$$(3) \qquad \overline{\varphi}_n=-\frac{c_1\,V t_n}{2}\,\alpha_n\,, \qquad\qquad R_n=\frac{c_1\,t_n\,\varrho}{4\,h\,\varepsilon} \qquad (4)$$

(ϱ résistivité du liquide du bassin, h sa hauteur, ε distance de 2 électrodes).

Les (2) s'identifient à la loi d'Ohm, R_n étant une résistance. Il suffit donc d'amener le courant au bassin par des électrodes auxiliaires E' portées aux potentiels $\overline{\varphi}_n$ connus et reliées aux E par les résistances connues R_n. Le bassin assure automatiquement aux électrodes E les potentiels φ_n cherchés d'où les valeurs de Γ véri-

fiant l'équation intégrale (autant de points de la courbe $\Gamma(x)$ que d'électrodes). Dans notre montage les R_n sont réalisés par le liquide contenu dans les compartiments d'une boîte en ébonite adjacente au bassin et qui contient les E et E'.

D'après (4) les E' (mobiles) sont placés une fois pour toute à des distances des E proportionnelles aux t_n ; les potentiels $\overline{\varphi}_n$ proportionnels aux produits αt dépendent de l'angle d'attaque pour lequel on se propose de construire la courbe Γ.

Deux potentiomètres à liquide permettent, l'un de prendre les potentiels $\overline{\varphi}_n$, l'autre de mesurer les φ_n (téléphone, le courant d'alimentation étant alternatif).

Nombre d'expériences ont été faites dans les cas suivants :

1° Ailes rectangulaires et elliptiques pour divers allongements.

2° Aile de forme plus compliquée, donc les données ont été fournies par la Société Provençale de Constructions Aéronautiques. Elles ont montré que la méthode électrique, d'une application très rapide, donne, avec les précautions convenables, des résultats qui concordent avec ceux que donne le calcul direct, l'erreur étant inférieure au $\frac{1}{100}$.

Un appareil plus précis est en cours d'essais, grâce à l'appui du Service des Recherches de l'Aéronautique qui a bien voulu s'intéresser à ce travail.

SUR UN PROBLÈME D'HYDRODYNAMIQUE

Par D. RIABOUCHINSKY, Paris

La méthode des variables φ, ψ, c'est-à-dire la détermination des mouvements fluides par des expressions de la forme $x = f_1(\varphi, \psi)$, $y = f_2(\varphi, \psi)$, où φ est le potentiel des vitesses généralisé et ψ la fonction de courant, présentant des particularités géométriques et analytiques très remarquables et jouissant de propriétés qui permettent de la rapprocher tantôt de la méthode des variables d'Euler, tantôt de celle des variables de Lagrange, ne saurait être considérée comme cas particulier de l'une quelconque de ces deux méthodes.

On désigne avec Maxwell les méthodes d'Euler et de Lagrange respectivement comme méthodes « statistique » et « historique » ; on pourrait nommer la méthode des variables φ, ψ — méthode « topographique » ou bien aussi méthode « des réseaux ».

Dans des cas plus généraux de mouvements fluides, il y a lieu de considérer des expressions de la forme $x = f_1(\varphi, \psi, t)$, $y = f_2(\varphi, \psi, t)$ et $x = f_1(\varphi, \psi_1, \psi_2, t)$, $y = f_2(\varphi, \psi_1, \psi_2, t)$, $z = f_3(\varphi, \psi_1, \psi_2, t)$, les variables ψ_1, ψ_2 étant les fonctions de courant dans l'espace. En généralisant cette méthode on peut l'étendre à l'étude des mouvements fluides dans un espace d'un nombre quelconque de dimensions.

La méthode des variables φ, ψ permet de traiter les différents cas de mouvements ondulatoires (ondes progressives simples, onde solitaire, ondes de Gerstner) d'une façon uniforme. On obtient pour l'onde de Gerstner la loi particulièrement simple de la répartition des pressions

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{g\psi}{a} = \frac{p_0}{\varrho},$$

a étant la vitesse de propagation de l'onde.

En désignant par $\frac{\partial}{\partial t}$ la dérivation partielle par rapport au temps dans le système des variables d'Euler et par $\frac{\delta}{\delta t}$ la dérivation partielle par rapport au temps dans le système des variables φ, ψ, t, on a les relations

$$\frac{\delta}{\delta t} = u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\delta}{\delta t},$$

où $u' = \frac{\delta x}{\delta t}$, $v' = \frac{\delta y}{\delta t}$ sont les composantes de la vitesse de déplacement du point géométrique déterminé par l'intersection d'une ligne de courant et d'une ligne équipotentielle données. Si le mouvement est irratationnel, on trouve, en nommant u, v les composantes de la vitesse du point fluide correspondant, la relation $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -(u u' + v v')$ et, par conséquent, comme équation de pression dans le système des variables φ, ψ, t :

$$\frac{p}{\varrho} - U + \tfrac{1}{2}\left[(u - u')^2 + (v - v')^2\right] - \tfrac{1}{2}(u'^2 + v'^2) = F(t).$$

Cette équation peut être interprétée comme exprimant que la vitesse u', v' joue en quelque sorte le rôle de vitesse d'entraînement généralisée [1]).

[1]) «Aperçus théoriques sur la mécanique des fluides», fascicule II. Bulletin du service technique de l'Aéronautique, N° 67, Paris, 1930.

DÉTERMINATION DES MOUVEMENTS PLANS D'UN FLUIDE VISQUEUX INCOMPRESSIBLE, OÙ LE TOURBILLON EST CONSTANT LE LONG DES LIGNES DE COURANT

Par J. KAMPÉ DE FÉRIET, Lille

La détermination du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible, de viscosité cinématique ν, se ramène à l'intégration du système de deux équations aux dérivées partielles :

$$(1) \qquad \Delta_2 \psi = -2\zeta ; \quad \nu \Delta_2 \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{D(\zeta, \psi)}{D(x, y)}$$

où $\psi(x, y, t)$ désigne la fonction de courant et $\zeta(x, y, t)$ le tourbillon; toute la difficulté du problème provient des termes non linéaires constitués par le jacobien de la $2^{\text{ème}}$ équation ; or, pour que ces termes disparaissent, il est nécessaire et suffisant que le tourbillon soit constant le long de chaque ligne de courant ; dans des travaux antérieurs [1]) j'ai formé tous les mouvements permanents de ce type et indiqué quelques mouvements non permanents ; je me propose, dans cette communication, d'exposer une méthode permettant d'obtenir facilement tous les mouvements satisfaisant à cette condition.

Le principe consiste à écrire les équations (1) dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales (q_1, q_2), où le système des courbes (q_1) est constitué précisément par les lignes de courant, c'est-à-dire où l'on pose $q_1 = \psi$, soit :

$$ds^2 = h_1^2 \, dq_1^2 + h_2^2 \, dq_2^2$$

le 1er coefficient a une interprétation cinématique simple $h_1^2 = 1 : v^2$; les équations (1) deviennent :

$$(2) \qquad \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = -2\zeta ; \quad \frac{\nu}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial \zeta}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial \zeta}{\partial q_2}\right)\right] = \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial \zeta}{\partial q_2} ;$$

auxquelles il faut joindre la condition exprimant que le ds^2 est celui d'un plan :

$$(2') \qquad \frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\right] + \frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\right] = 0 ;$$

[1]) J. Kampé de Fériet — Annales de la Société Scientifique de Bruxelles tome 50 (1930), p. 77. — Comptes rendus du $3^{\text{ème}}$ Congrès Intern. de Mécanique appliquée (Stockholm 1930) vol. 1, p. 334.

ces équations paraissent d'ailleurs intéressantes en elles-mêmes et peuvent servir à résoudre d'autres problèmes que celui-ci. La classe actuelle de mouvements correspond à l'hypothèse $\zeta = \zeta(q_1, t)$; d'où les 3 équations :

$$(3) \qquad \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2}{h_1}\right) = -2\zeta ; \qquad \frac{\nu}{h_1^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial q_1^2} - 2\nu\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial q_1} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} ; \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} = 0 ;$$

qui suffisent à déterminer les 3 fonctions inconnues ζ, h_1, h_2. Le tableau suivant épuise toutes les solutions des équations (3):

Cas I . $\frac{\partial \zeta}{\partial t} \neq 0 \quad \frac{\partial \zeta}{\partial q_1^2} = 0$; le tourbillon ζ est une fonction linéaire de ψ ; on obtient comme fonction de courant :

$$\psi(x, y, t) = e^{-k\nu t} \psi_0(x, y)$$

où $\psi_0(x, y)$ désigne une solution arbitraire de l'équation :

$$\Delta_2 \psi_0 + k \psi_0 = 0$$

Cas II : $\frac{\partial \zeta}{\partial t} \neq 0 \quad \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{h_1^2}\right) = 0$; on obtient tous les mouvements où les lignes de courant sont des droites parallèles ou des circonférences concentriques ; la détermination du tourbillon se ramène alors à l'intégration de l'équation de la chaleur.

Cas III : $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \zeta}{\partial q_1} = 0$; on obtient les mouvements bien connus où le tourbillon est constant dans tout le fluide.

Cas IV : $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \zeta}{\partial q_1} \neq 0$; on obtient les deux types élémentaires de mouvements permanents, où les lignes de courant sont des droites parallèles et des circonférences concentriques, indiqués dans un travail antérieur.

Dans les mouvements que nous venons de déterminer, les courbes $\zeta =$ constante sont confondues avec les lignes de courant ; dans tout autre mouvement les courbes (ζ) et (ψ) sont distinctes ; il est intéressant de noter que les équations (2) permettent d'établir facilement qu'il n'existe aucun mouvement permanent où ces courbes soient orthogonales.

DETERMINATION OF MATTER AND FORCE COMPONENTS FROM THE RIEMANN TENSOR

By G. Y. RAINICH, Michigan

After Einstein introduced his General Relativity Theory it seemed that curvature of space-time has been made to account for gravitation only, and that it was necessary to generalize geometry in order to find place in it also for the components of the electromagnetic forces. Many generalizations have been proposed with that idea in mind. The purely mathematical discussions of the present paper is, on the contrary, founded on the conviction that a Riemannian space-time possesses enough complexity to make it possible to interpret in it all the quantities of Classical Physics. Previously the author treated the case when matter was absent (Trans. Amer. Mat. Soc. vol. 25); now matter is considered as present, and the question is investigated whether the contracted Riemann tensor may be split up uniquely into a part corresponding to matter and a part corresponding to electromagnetic forces. The question and in part the results are quite complicated due to pseudo-euclidean character of space-time — the corresponding mathematical question for euclidean four-space is much simpler and has been treated by the author before (Bul. Amer. Math. Soc. vol. 36).

THÉORIE UNITAIRE DE LA PHYSIQUE À GÉOMÉTRISATION ABSOLUE

Par PAOLO STRANEO, Genova

La théorie relativistique de la gravitation d'Einstein se développait dans un espace-temps riemannien. Elle était par cela même définie indépendemment dans chaque élément. De plus sa loi fondamentale $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} = - S_{\mu\nu}$ était encore dépendante du tenseur S, qui devait être interprété physiquement.

On se proposa ensuite d'étendre la théorie à tous les phénomènes physiques, d'abord sans se préoccuper de l'élimination des deux défauts relevés (problème de Weyl), après en se proposant d'arriver à une loi se prolongeant dans tout l'espace-temps et sans résidus de nature physique (problème d'Einstein).

Les deux problèmes impliquent en tous cas *une généralisation* de la nature géométrique de l'espace-temps et *la position d'une loi* entre ses éléments fondamentaux, laquelle, seulement dans le premier cas, pourra comprendre quelque tenseur physique et laisser encore disgrégés les éléments de l'espace-temps.

Le problème plus général se résout en admettant pour l'espace-temps la connexion

$$L^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} + \Omega^{\alpha}_{\mu\nu}$$

avec les conditions supplémentaires du *parallélisme absolu* $\left(L^{\alpha}_{\mu\nu\rho} \equiv 0\right)$ et de l'invariance des longueurs dans les transports par parallélisme ($g_{\mu\nu/\rho} \equiv 0$).

Cela revient à admettre, pour le tenseur de torsion Ω, l'existence des seules composantes où les trois indices ont des valeurs différentes.

La relation entre le tenseur de Riemann R et celui de torsion Ω, est alors donnée par le système

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\rho} + \Omega_{\nu\rho}{}^{\alpha}{}_{,\mu} + \Omega^{\lambda}_{\nu\rho}\,\Omega^{\alpha}_{\lambda\mu} = 0, \qquad \alpha \neq \mu \neq \nu = 1, 2, 3, 4,$$

qui ne détermine pas seulement la nature de l'espace-temps où nous pouvons poser nos lois physiques, mais qui représente déjà ces mêmes lois. (, signe de dérivation covariante par rapport au tenseur fondamental $\underline{g}$.)

C'est notre loi unitaire.

Par contraction ($\alpha = \rho$) on obtient les équations

$$R_{\mu\nu} = \Omega^{\lambda}_{\alpha\nu}\,\Omega^{\alpha}_{\lambda\mu},$$

notamment équivalentes aux équations de la gravitation.

Par contraction ($\alpha = \mu$) on obtient les équations

$$\Omega^{\alpha}_{\nu\rho,\alpha} = 0$$

qu'on démontre facilement être équivalentes aux équations de Maxwell.

Ce qui dans cette théorie est *très frappant* c'est le fait que, si l'on déforme un espace pseudo-euclidien à quatre dimensions, avec la seule condition qu'il reste à parallélisme absolu et admettant le transport parallèle des longueurs sans altération, on le ramène sans autre à coincider avec un espace-temps conforme à notre physique, où aussi tous les éléments physiques sont représentés géométriquement au

moyen du tenseur de torsion Ω, tandis que le potentiel einsteinien de la gravitation reste encore représenté par le tenseur fondamental g.

Le problème de Weyl correspond au cas particulier où

$$3\,\Omega_{\alpha\mu\nu} = \varepsilon_{\alpha\mu}\,\psi_\nu + \varepsilon_{\mu\nu}\,\psi_\alpha + \varepsilon_{\nu\alpha}\,\psi_\mu\,,$$

$\varepsilon_{\alpha\beta}$ étant un tenseur (émisymmétrique) E du deuxième ordre, pour lequel on a

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{matrix} 0 & \text{pour } \alpha = \beta \\ \pm\sqrt{g} & \text{„} \quad \alpha \neq \beta \end{matrix}\,.$$

PROJEKTIVER ZUSAMMENHANG MIT FUNDAMENTALQUADRIK

Von D. van DANTZIG, Delft (gemeinsam mit J. A. SCHOUTEN, Delft)

Die n-dimensionale nicht ebene projektive Geometrie läßt sich am einfachsten behandeln mit Hilfe von $n+1$ homogenen Urvariablen x^ν, $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$, die allen homogenen Transformationen vom Grade 1 unterworfen werden. Ko- und kontravariante Punkte, sowie Projektoren werden in bezug auf diese Variablen in derselben Weise definiert wie Vektoren und Affinoren in bezug auf gewöhnliche Urvariablen. Es kommt nur die Bedingung hinzu, daß die Bestimmungszahlen homogene Funktionen irgend eines bestimmten Grades der Urvariablen sind. Wichtiger als der Grad ist der Exzeß (Grad + kontravariante — kovariante Valenz), der bei allen vorkommenden Operationen invariant ist. Die Projektoren sind Größen der lokalen ebenen Mannigfaltigkeiten E_n^*, die mit einer projektiven statt mit einer affinen Geometrie ausgerüstet sind. Die x^ν selbst transformieren sich merkwürdigerweise wie die Bestimmungszahlen eines kontravarianten Punktes und bestimmen somit in jeder lokalen E_n^* einen Punkt, den *Berührungspunkt.* Unter einem projektiven Zusammenhang versteht man eine Vorschrift zur kovarianten Differentiation. Kovariante Differentiale gibt es im allgemeinen nicht, sie sind aber stets vorhanden, wenn in den lokalen E_n^* eine Hyperebene ausgezeichnet ist. In dem Falle ist der Zusammenhang gleichwertig mit einer *Uebertragung,* die benachbarte E_n^* projektiv auf einander abbildet, zusammen mit einer *Korrespondenz*, die jede E_n^* in sich selbst projektiv transformiert. Wir betrachten den Fall, daß in jeder lokalen E_n^* eine

Quadrik gegeben ist, die Fundamentalquadrik. Dann liegt auch eine Hyperebene fest, die Polarhyperebene q_λ des Berührungspunktes. Diese Hyperebene wird die uneigentliche Hyperebene, ihre Punkte sind von jetzt an mit kontravarianten Vektoren zu identifizieren. Punkte und Vektoren sind verkettet wie in der Möbiusschen Punktrechnung. Es stellt sich heraus, daß $q_{\mu\lambda} = \partial_{[\mu} q_{\lambda]}$ ein Bivektor ist. In der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit wird eine Riemannsche Geometrie festgelegt. Der die Quadrik tangierende Kegel aus dem Berührungspunkt ist der Nullkegel. Wir fordern nun von dem Zusammenhang:

1. Die Fundamentalquadrik geht in sich über.
2. Die Polarhyperebene des Berührungspunktes ist bei der Korrespondenz invariant.
3. Die Korrespondenz wirft jeden Punkt in diese Polarhyperebene.
4. Die affine Uebertragung, die von der projektiven induziert wird, ist mit der gewöhnlichen Riemannschen Uebertragung identisch.
5. Der Berührungspunkt bewegt sich bei der Uebertragung senkrecht zur Uebertragungsrichtung.

Der in dieser Weise entstehende Zusammenhang hat u. a. folgende geometrische Eigenschaften:

Korrespondenz:

1. Die Korrespondenz ordnet jedem Punkt einen *Vektor* zu.
2. Die Korrespondenz ordnet jedem Vektor einen dazu senkrechten Vektor zu.
3. Dem Berührungspunkt wird der Nullvektor zugeordnet.

Uebertragung:

4. Das kovariante Differential des Berührungspunktes ist ein kontravarianter Vektor.
5. Das kovariante Differential von q_λ ist ein kovarianter Vektor.
6. Wenn die Verschiebungsrichtung die Richtung eines Vektors hat, ist das kovariante Differential dieses Vektors ein Vektor.
7. Das Möbiussche Gewicht eines Punktes ändert sich nicht, wenn die Fortschreitungsrichtung in der Verbindungsgeraden des Punktes mit dem Berührungspunkt fällt.

Der Zusammenhang ist durch diese 5 geometrischen Forderungen noch keineswegs vollständig festgelegt. Eindeutige Festlegung kann auf Grund von physikalischen Forderungen geschehen. Vgl. dazu den nachstehenden Vortrag von J. A. Schouten (gemeinsam mit dem Vortragenden).

VERWENDUNG EINES PROJEKTIVEN ZUSAMMENHANGS MIT FUNDAMENTALQUADRIK ZUR BILDUNG EINER GENERELLEN FELDTHEORIE

Von J. A. SCHOUTEN, Delft (gemeinsam mit D. van DANTZIG, Delft)

Wir verwenden den projektiven Zusammenhang des vorigen Vortrages und stellen nun folgende physikalische Forderungen:

1. Die geodätischen Linien sollen die Weltlinien geladener Massenteilchen sein. (Es ergibt sich, daß die konstante Entfernung des bewegten Punktes zum Aufpunkt dem Quotienten $\frac{m}{e}$ proportional ist.) Die fünfte geometrische Forderung folgt aus der ersten physikalischen.
2. Der Punkt p^{ν}, der entlang einer Weltlinie kovariant konstant ist, ist der totale Impulsenergiepunkt, d. h. er unterscheidet sich vom totalen Impulsenergievektor nur um einen projektiven Gradienten. (Die Gleichung der geodätischen Linie wird also Bewegungsgleichung und Erhaltungssatz in einem.)
3. Die einfachste sich darbietende Diracsche Gleichung (in Fünferkoordinaten) ist mit der gewöhnlichen Diracschen Gleichung identisch. (D. h. der Zusammenhang muß so gewählt werden, daß die störenden Extraglieder gerade verschwinden.)
4. Der Operator $\frac{h}{i} \nabla_{\mu}$ angewandt auf Spinvektordichten ist quantentheoretisch aequivalent mit dem totalen Impulsenergiepunkt p_{μ}. Die der Diracschen entsprechende algebraische Gleichung hat eine nichtverschwindende Lösung.
5. Variation der einfachsten sich darbietenden Invariante (die sich aus der Krümmungsgröße des Zusammenhangs genau in derselben Weise ergibt wie die Krümmungsinvariante der gewöhnlichen Relativitätstheorie aus der Riemannschen Krümmungsgröße) ergibt sowohl die Feldgleichungen der Gravitation als das eine Maxwellsche Gleichungssystem. (Das andere Maxwellsche System ist dadurch gesichert, daß der elektromagnetische Bivektor bis auf einen konstanten Faktor gleich $q_{\mu\lambda}$ ist.)

Durch die fünf physikalischen Forderungen zusammen mit den vier ersten geometrischen des vorigen Vortrags ist der Zusammenhang vollständig festgelegt. Nur die Wahl der Längeneinheit ist noch frei, sämtliche andere Konstanten sind eindeutig bestimmt. Der Operator der Diracschen Gleichung ist aequivalent mit einem

der beiden komplex konjugierten Schnittpunkte u^ν und $\bar{u}^\nu$ der Quadrik mit der Geraden durch den Aufpunkt und den Stromvektor $m\,i^\nu$ (der ja als Vektor Punkt der uneigentlichen Hyperebene ist). Der Operator der Schrödingergleichung ist aequivalent mit dem reellen Teil des skalaren Produktes von u^ν mit sich selbst, und dieser Skalar, als Hamiltonsche Funktion angesetzt, ergibt die Gleichung der geodätischen Linien in kanonischer Form.

Von der projektiven Theorie von Veblen und Hoffmann [1]) und von der (projektivisierten) Theorie von Einstein und Mayer unterscheidet diese Theorie sich dadurch, daß sie weniger geometrische Forderungen zugrunde legt und somit imstande ist, sich besser den physikalischen Forderungen anzupassen. Die erstgenannte Theorie vermag infolge der ihr zugrunde liegenden Symmetrieforderung weder den Impulsenergiepunktsatz noch die richtigen Diracschen Gleichungen zu liefern. Die an zweiter Stelle genannte, die die Existenz eines gewöhnlichen kovarianten Differentials verlangt, könnte, richtig erweitert, den Impulsenergiesatz liefern, aber nicht die richtigen Diracschen Gleichungen. Außerdem führen beide Theorien zu dem Index 4 (Vorzeichen $+ + + + -$) des Fundamentaltensors, während unsere Theorie zum Index 3 (Vorzeichen $- + + + -$) führt, dem einzigen, der sich sowohl mit der Schrödingergleichung verträgt, als auch in der Diracschen Theorie uneigentliche Faktoren $\sqrt{-1}$ vermeidet und somit die Hermitesche Symmetrie automatisch hervortreten läßt.

Als besonders merkwürdiger Umstand sei noch mitgeteilt, daß der unbestimmte Potentialvektor φ_μ sich ganz beseitigen läßt und daß seine Rolle durch die vollständig bestimmte uneigentliche Hyperebene q_μ übernommen wird. In Uebereinstimmung damit erscheint der Wellenvektor Ψ in der von φ_μ befreiten Gleichung normiert, d. h. nicht nur bis auf einen beliebigen Faktor der Form $e^{i\varphi}$, sondern bis auf einen *konstanten* Faktor von dieser Form bestimmt.

---

[1]) Dies bezieht sich ausdrücklich nur auf die Arbeiten dieser Autoren, wo der projektive Zusammenhang tatsächlich physikalische Anwendung gefunden hat, nicht aber auf die allgemeinere, physikalisch aber noch nicht ausgebeutete Theorie der projektiven Zusammenhänge in Veblens Generalised Projective Geometry, Journ. Lond. Math. Soc. 4, 140—160, 1929, insbesondere S. 146.

LES NOMBRES DE CLIFFORD ET LEURS APPLICATIONS À LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Par G. JUVET, Lausanne

1. Il y a peu[1]), j'ai montré l'utilité des nombres de Clifford pour l'électromagnétisme. En précisant la signification de l'opérateur

$$\Gamma \cdot = \sum_{i=1}^{i=4} \Gamma_i \frac{\partial \cdot}{\partial x_i},$$

on peut compléter les résultats, tout formels d'ailleurs, qui figurent dans ce mémoire. Si C est un nombre de Clifford variable, on a :

$$-\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \Gamma \cdot C = \lim_{\rho = 0} \frac{\iiint_L d\tau\, C}{\varrho},$$

où ϱ est l'hypervolume d'une région limitée par la frontière L, dont $d\tau$ représente le trivecteur élémentaire.

2. Cette relation montre en particulier que, F étant un bivecteur, $F\, d\tau\, F$ a pour dérivée extérieure

$$[(F \cdot \Gamma) F + F(\Gamma \cdot F)]\, |d\varrho|$$

$|d\varrho|$ = valeur absolue de l'élément d'hypervolume, ce qu'on peut écrire

$$F \cdot \Gamma \cdot F\, |d\varrho|$$

où il faut entendre que $\cdot \Gamma \cdot$ est un opérateur différentiel agissant sur le produit $F \cdot F$ par le milieu[2]).

3. Dès lors les lois de l'électromagnétisme peuvent se condenser dans les propositions suivantes (*loc. cit.*):

a) le champ est un bivecteur $F = \Sigma F_{ik} \Gamma_i \Gamma_k$

b) il dérive d'un potentiel $\Phi = \Sigma \Phi_i \Gamma_i$

$$\Gamma \Phi = F$$

c) le courant est un vecteur $C = \Sigma C_i \Gamma_i$ qui dérive du champ

$$\Gamma F = -C.$$

---

[1]) Comm. Math. Helv. vol. 2, p. 225—235; pour l'espace à 4 dimensions, j'ai appelé ces nombres, nombres de Lorentz.

[2]) Cf. p. ex. *L. Silberstein*, The Theory of Relativity, 2d ed., London, 1924, p. 223

On tire de là $\Gamma^2 \Phi = - C$, équation dite des potentiels retardés.

d) Le mouvement de la matière électrisée est donnée par l'équation

$$\frac{dV}{ds} + \frac{1}{2} F \cdot \Gamma \cdot F = 0$$

où $V = \Sigma V_i \Gamma_i$ est l'impulsion d'univers rapportée à l'unité d'hypervolume ; $-\frac{1}{2} F \cdot \Gamma \cdot F$ est la force de Lorentz. S'il n'y a pas de matière en jeu, l'équation de conservation relative au champ s'écrit

$$F \cdot \Gamma \cdot F = 0$$

ou $\iiint_L F \, d\tau \, F = 0$, L étant une hypersurface fermée quelconque.

4. On peut écrire l'équation de Dirac sous la forme

$$\Gamma \cdot \psi + \alpha \psi = 0 \qquad (\alpha = \text{const.})$$

où ψ est un nombre de Clifford. On peut lui associer l'équation

$$\psi' \cdot \Gamma + \alpha \psi' = 0$$

S'il y a un champ, on aura :

(1) $$(\Gamma \cdot + \beta \Phi) \psi + \alpha \psi = 0, \qquad (\beta = \text{const.})$$

l'associée est

(2) $$\psi' (\cdot \Gamma - \beta \Phi) + \alpha \psi' = 0,$$

d'où l'on tire $$\iiint_L \psi' \, d\tau \, \psi = 0.$$

L'interprétation de cette équation de conservation n'est possible que lorsqu'on a précisé la nature des solutions de (1) et de (2); nous renvoyons pour cela aux mémoires de M. A. Proca [1]).

Ce bref exposé résume un mémoire qui paraîtra dans un autre recueil [2]).

---

[1]) C. R. Paris et J. de Phys., 1930 à 1932 *passim*; en particulier J. de Phys., avril 1932; M. Proca est le premier qui ait proposé de considérer le ψ de Dirac comme un nombre de Clifford.

[2]) Bull. Soc. neuch. Sc. nat. 2e vol. du Centenaire (paraîtra en 1933).

MECHANISIERUNG DER WELLENMECHANIK UND DER QUANTENTHEORIE

Von ARTHUR KORN, Berlin

Man betrachte die Spekulationen der allgemeinen Relativitätstheorie als nicht vorhanden; die Wellenmechanik von *De Broglie* und *Schrödinger* soll auf den Voraussetzungen der Mechanik aufgebaut werden, in dem allgemeinen Wunsche, alle in der Physik und Chemie betrachteten Erscheinungen als Bewegungen einer (wenn möglich einheitlichen) Materie darzustellen. Die Mechanik soll dabei nicht in starren Sinne die alte klassische Mechanik sein, sondern die klassischen Grundprinzipien werden nur als erste Näherungen betrachtet, zu denen, wenn nötig, weitere Näherungen hinzuzufügen sind. Die Materie der Elektronen und der gravitierenden Teilchen wird als *schwach kompressibel* vorausgesetzt, für ihre Bewegung gelten die *hydrodynamischen Gleichungen*. Die Zustandsgleichung

$$p = c\,\mu$$

(p Druck, μ Dichte) wird in der kinetischen Gastheorie im allgemeinen auf mechanischer Grundlage so zurechtgelegt, daß die Konstante c mit der absoluten Temperatur proportional und diese dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat der ordnungslos durcheinanderfliegenden Gasteilchen proportional zu setzen ist. Diese mechanische Zurechtlegung der kinetischen Gastheorie ist aber nur gerechtfertigt, wenn die mittleren Geschwindigkeitsquadrate der ungeordneten Bewegung groß gegen die Quadrate der fortschreitenden Geschwindigkeiten sind und Schwingungen sehr großer Frequenz ausgeschlossen werden. Grade der Fall von Schwingungen sehr hoher Frequenz ist von Bedeutung, und man kann eine neue Form der Zustandsgleichung mechanisch begründen, in welcher bei Vorhandensein einer hohen Frequenz ν die Konstante c im wesentlichen mit der Frequenz ν und der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur proportional wird.

Untersucht man bei dieser Zustandsgleichung die Resultate der hydrodynamischen Gleichungen für ein schwach kompressibles Medium, das sich in bezug auf seine fortschreitenden Bewegungen scheinbar unter dem Einfluß einer Kräftefunktion φ bewegt, so ergibt sich, daß zu den klassischen Bewegungen noch Schwingungen hinzutreten, und zwar wird für die Eigenschwingungen die Schrödingersche Wellengleichung zuständig. Die De Broglie-Wellen mit ihren Eigenschaften ergeben sich zwanglos bei Fehlen einer Kräftefunktion. Die Kräftefunktionen der fortschreitenden Bewegungen (Gravitationspotential, Coulombsche Potentiale usw.) sind sämtlich mechanisch zu interpretieren.

Der Zusammenhang der allgemeinen Quantentheorie mit der Wellenmechanik kann ähnlich wie in der Schrödingerschen Theorie gegeben werden.

SU LA PROBABILITÀ DI PRESENZA DELL'ELETTRONE SECONDO LA MECCANICA ONDULATORIA

Di U. CRUDELI, Cagliari

Con riguardo alla trattazione relativistica dello scalare ψ di De Broglie-Schrödinger per lo studio dell'elettrone (del così detto elettrone puntiforme), al quale sia consentita libera presenza in un assegnato campo elettromagnetico maxwelliano, viene da noi ottenuta per la densità (diciamola ϱ) dell'ipotetico fluido probabilistico di essa presenza, *una comprensiva formula generale in esatto accordo con l'equazione di continuità di esso fluido;* formula che consente in *modo suggestivo* la visione del divario fra la densità introdotta in codesta maniera e quella cui si perverrebbe, identificandola col quadrato del modulo dello scalare ψ, ad estensione del principio delle interferenze (Born) in meccanica ondulatoria.

Il nostro svolgimento avviene nello schema relativistico di formazione immediatamente anteriore alle modifiche del Dirac.

Denoteremo: con w la velocità del suddetto fluido probabilistico di presenza; con m la massa dell'elettrone, della quale il valore coincide con quello della massa di quiete dell'elettrone classico; con c la solita velocità della luce.

In base all'equazione (relativistica) fondamentale cui soddisfa la

$$\psi = a\, e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi} \qquad \begin{pmatrix} h = \text{costante del Planck} \\ i = \sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

(dove a e φ sono entrambe reali), l'introduzione del noto quadrivettore (Vierervektor) del Gordon ebbe a consentire notoriamente uno studio cospicuo [1]) di esso ψ.

Io, riprendendo codesto studio ed introducendo, mediante

$$Q = -\frac{h^2}{8\pi^2 c^2 m a}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 a\right),$$

quella che, con estensione di una dicitura implicitamente introdotta dal De Broglie [2]), verrebbe detta *energia quantica,* pervengo a trovare che la densità ϱ, all'infuori (se vogliamo) di un fattore costante, il cui valore numerico (diverso da zero) rimane

[1]) Cfr. *L. De Broglie:* The wave mechanics and the atomic structure of matter and of radiation, in Selected papers on wave mechanics, (1929), by L. De Broglie and L. Brillouin, p. 113.

Cfr. inoltre *O. Klein* in Zeitschrift für Physik (1927 — Band XL I).

[2]) Vedasi *L. De Broglie:* Introduction à l'étude de la mécanique ondulatoire (1930). p. 123.

a nostra completa scelta, si presenta suscettibile della seguente forma (esatta) generale:

$$\varrho = \frac{a^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{c}\right)^2}} \sqrt{1 + \frac{2\,Q}{m\,c^2}},$$

la quale porge la formula cui superiormente abbiamo alluso [1]).

SULL'INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL-HERTZ CHE REGOLANO I FENOMENI LUMINOSI NEI MEZZI CRISTALLINI UNIASSICI

Di ANGELO TONOLO, Padova

Il problema che mi sono proposto di risolvere è il seguente: Conosciute le forze elettriche e magnetiche per ogni istante di tempo nei punti di una superficie fissa, chiusa σ, determinare queste forze nei punti interni a σ per qualunque istante di tempo. Il metodo che adopero per risolvere il problema è il seguente:

a) Determinazione per ogni istante di tempo della derivata normale di queste forze nei punti di σ in funzione dei dati.

b) Dalle equazioni dichiarate nel titolo si traggono due gruppi (A) e (B) di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine; al gruppo (A) soddisfano le componenti della forza elettrica, e al gruppo (B) quelle della forza magnetica.

c) Integrazione delle equazioni (A) e (B).

d) Dimostrazione che gli integrali di (A) e (B) i quali soddisfano sopra σ alle equazioni di Maxwell-Hertz, verificano queste equazioni anche nell' interno di σ.

[1]) La relativa dimostrazione viene riserbata per il «*Nuovo Cimento*» del 1933.

WÄRMELEITUNG IM MEERE

Von JONAS EKMAN FJELDSTAD, Bergen

Eine Untersuchung von *Helland-Hansen* über den jährlichen Temperaturgang im Meere hat ergeben, daß die Temperaturkurven mit der Tiefe eine allmählich zunehmende Asymmetrie zeigen, indem die Temperatur im Sommer zuerst verhältnismäßig schnell, dann langsamer ansteigt, um am Ende des Jahres schnell zu fallen.

Ich habe diese Asymmetrie zu erklären versucht unter der Annahme, daß die turbulente Wärmeleitungsfähigkeit im Laufe des Jahres periodisch veränderlich ist.

Ich habe die spezielle Annahme gemacht, daß die Temperaturleitungsfähigkeit von der Form $\nu(t)\,\eta(z)$ ist. Durch Einführung einer neuen Zeitvariablen erhält man jedoch die Wärmeleitungsgleichung in der gewöhnlichen Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial u}{\partial z}\right) + f(z, t)$$

wo $f(z, t)$ die Temperatursteigerung wegen der Absorption von Sonnen- und Himmelsstrahlung ist. Ich suche von dieser Gleichung ein periodisches Integral, das an der Oberfläche mit der beobachteten Temperatur $k(t)$ übereinstimmt, während am Boden $z = h$ die konstante Temperatur v herrschen soll.

Die Integration wird mit Hilfe der Theorie der Integral-Gleichungen gemacht. Man findet dann für u

$$u = v \frac{\int_0^z \frac{ds}{\eta(s)}}{\int_0^h \frac{ds}{\eta(s)}} + \sum_{-\infty}^{+\infty} k_n \Phi_n(z)\, e^{in\sigma t} + \int_0^h \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(s)\, \Gamma_n(z, s)\, e^{in\sigma t}$$

wo k_n und $f_n(s)$ Fourierkoeffizienten von $k(t)$ und $f(s, t)$ sind.

$\Gamma_n(z, s)$ ist eine Greensche Funktion und läßt sich als lösender Kern einer Integralgleichung herstellen, während

$$\Phi_n(z) = \left(\eta \frac{\partial \Gamma_n}{\partial s}\right)_{s=0}$$

ist. Sieht man von dem Strahlungsglied ab, das gewöhnlich klein ist, so ist

$$k_n \Phi_n(z)$$

der Fourierkoeffizient für die Temperaturkurve in der Tiefe z. Setzen wir weiter

$$k_n \Phi_n (z) = A_n e^{-i\psi_n}$$

so findet man die Formel

$$\eta (z) = -\frac{m\sigma}{A_n^2 \frac{d\psi_n}{dz}} \cdot \int_z^h A_n^2 \, dz$$

Nach dieser Formel läßt sich $\eta (z)$ bestimmen. Für das Biscaya-Gebiet findet man für die oberen 10 bis 15 Meter einen Wert von ca. 15. Tiefer fällt der Wärmeleitungskoeffizient schnell auf Werte von etwa 3.

Ich habe für $r (t)$ die Form

$$r (t) = r_0 (1 + \gamma \cos [\sigma t - \zeta - \varrho \sin (\sigma t - \zeta)])$$

angenommen, und so Temperaturkurven berechnet, die eine gute Uebereinstimmung mit den beobachteten zeigen.

NEUE NUMERISCHE BAHNBERECHNUNGEN EINES ELEKTRONS IM FELDE EINES DIPOLS

Von CARL STÖRMER, Oslo

In den Jahren 1904—1907 habe ich, unterstützt von meinen Assistenten, ausgedehnte Berechnungen der Bahnen eines Elektrons im magnetischen Dipolfelde ausgeführt, indem ich die Bewegungsgleichungen des Elektrons numerisch integrierte [1]). Diese Berechnungen konnten in den letzten Jahren dank der Unterstützung durch 13,500 norwegische Kronen aus „ Det Videnskabelige Forskningsfond av 1919“ wieder aufgenommen werden. Von den neu berechneten merkwürdigen Bahnformen sind bisher nur die periodischen Bahnen veröffentlicht [2]), die durch die schönen Versuche E. Brüches eine interessante physikalische Bestätigung gefunden haben [3]). Jetzt sind

[1]) *Carl Störmer.* Résultats des calculs numériques des trajectoires des corpuscules électriques dans les champs d'un aimant élémentaire. I, II und III, Videnskabsselskabets Skrifter, Christiania (Oslo) 1913.

[2]) *Carl Störmer,* Periodische Elektronenbahnen im Felde eines Elementarmagneten und ihre Anwendung auf Brüches Modellversuche und auf Eschenhagens Elementarwellen des Erdmagnetismus, ZS. f. Astrophysik, Bd. 1, Heft 4, S. 237, 1930.

[3]) *Ernst Brüche,* Störmers Polarlichttheorie in Experimenten, ZS. f. Astrophys., Bd. 2, Heft 1, S. 30 1931.

auch die Berechnungen weiterer neuer Bahnen durch den Dipol fertig geworden. Sie sind wichtig für die Theorie des Polarlichtes und interessant in ihrem Zusammenhang mit mechanischen Problemen, weswegen sie hier behandelt seien.

Bei Annahme des Dipols im Anfangspunkt eines Cartesischen Koordinationsystems und bei passender Wahl der Längeneinheit lauten die Differentialgleichungen der Bahnkurven:

$$r^5 \frac{d^2 x}{ds^2} = 3\,yz\,\frac{dz}{ds} - (3\,z^2 - r^2)\,\frac{dy}{ds}$$

(1)
$$r^5 \frac{d^2 y}{ds^2} = (3\,z^2 - r^2)\,\frac{dx}{ds} - 3\,xz\,\frac{dz}{ds}$$

$$r^5 \frac{d^2 z}{ds^2} = 3\,xz\,\frac{dy}{ds} - 3\,yz\,\frac{dx}{ds}$$

wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und wo s die Bogenlänge ist. Wenn wir hier $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ setzen, bekommen wir durch eine Integration

$$R^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{R^2}{r^3} - 2\,\gamma_1,$$

wo γ_1 eine Integrationskonstante ist, die wir im Folgenden als positiv voraussetzen wollen. Setzen wir weiter $R_1 = 2\,\gamma_1 \cdot R$, $z_1 = 2\,\gamma_1\,z$, $r_1 = 2\,\gamma_1\,r$, $T = 8\,\gamma_1^3\,s$, so bekommen wir das System

(2)
$$\frac{d^2 R_1}{dT^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial R_1},\quad \frac{d^2 z_1}{dT^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial z_1}$$

$$\left(\frac{dR_1}{dT}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dT}\right)^2 = U + v^2$$

wo

$$v = \frac{1}{4\gamma_1^2}$$

und wo U eine Funktion von R_1 und z_1 ist, durch die Gleichung

$$U = -\left(\frac{R_1}{r_1^3} - \frac{1}{R_1}\right)^2$$

definiert.

Dieses System erlaubt folgende mechanische Deutung: Sind R_1 und z_1 die Cartesischen Koordinaten eines materiellen Punktes p, der sich unter dem Einfluß einer Kraft mit der Kraftfunktion $\frac{1}{2}\,U$ in einer Ebene bewegt, so gibt das System II

die Bewegungsgleichungen dieses Punktes [1]). Die Elektronenbahnen durch den Dipol entsprechen insbesondere Bahnkurven des Punktes p, wenn dieser Punkt mit der Geschwindigkeit v vom Ausgangspunkt $R_1 = 0$, $z_1 = 0$ tangential zu der Kurve $R_1^2 = r_1^3$ fortgeschleudert wird. Betrachtet man dann das Kraftfeld $U =$ Konstant, so werden alle merkwürdigen Formen der berechneten Kurven unmittelbar verständlich[2]).

THE RADIATION OF ANGULAR MOMENTUM

By ARTHUR W. CONWAY, Dublin

Abraham has calculated the angular momentum from two Hertzian doublets whose time-phases differed by one quarter of a period (Physik. Zeitschr. 15, 914, 1914) using the classical electrodynamics and assuming that one quantum of energy was radiated. The present author extends this result to the general case in which the vibrating systems depend on two Legendre functions of orders n, n' and ranks s, s'. No angular momentum is radiated unless $n = n'$ and $s = s' \pm 1$, $s = s'$. If we write the Legendre functions in the form

$$a_s \omega_s + a_s \omega_s', \text{ etc. and } b_s \omega_s + b_s' \omega_s', \text{ etc.}$$

where $\omega_s = \lambda_n^{(s)} P_n(\mu) \cos s\varphi, \quad \omega_s' = \lambda_n^{(s)} P_n(\mu) \sin s\varphi$

where $\lambda_n^{(s)}$ is a normalizing constant, we find, if one quantum $h\nu$ of energy is radiated, for the X-component of angular momentum

$$\frac{1}{2} \sum \frac{\lambda_n^{(s)}}{\lambda_n^{(s+1)}} X_s \frac{h}{2\pi D}$$

and for the Z-component

$$\sum_s \frac{Z_s h}{2\pi D}$$

---

1) *Carl Störmer*, Sur le mouvement de corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire et la forme de leur trajectoire à leur arrivée à l'aimant. Archives des Sciences physiques et naturelles, 1913, Genf.

2) Näheres darüber findet man in meiner Abhandlung: How the horse-shoe formed auroral curtains can be explained by the corpuscular theory, in der Zeitschrift: Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity, Washington 1932

where

$$D = \Sigma\,(a'_s + b'_s + a'^2_s + b'^2_s)$$

$$X_s = \begin{vmatrix} a_s & a'_{s+1} \\ b_s & b'_{s+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{s+1} & a'_s \\ b_{s+1} & b'_s \end{vmatrix},$$

$$Z_s = \begin{vmatrix} a_s & a'_s \\ b_s & b'_s \end{vmatrix}.$$

From the relation $\quad 4X_s^2 + 4Y_s^2 + 4(Z_s - Z_{s+1})^2 \leqq D^2$

by making assumptions such as $2X_s = D,\ Y_s = Z_s = Z_{s+1} = 0$,

we get axial components $\frac{sh}{2\pi}$ and equatorial components $\frac{1}{2}\sqrt{n(n+1) - s(s+1)} \cdot \frac{h}{2\pi}$.

ÜBER EINIGE RANDWERTPROBLEME

Von RUDOLF WEYRICH, Brünn

Eine axialsymmetrische Lösung der Wellengleichung, in der die Wellenzahl k^2 eine im allgemeinen komplexe, abteilungsweise konstante Funktion von r sein soll, läßt sich für die Stetigkeitsbereiche von k^2 in Form eines bestimmten Integrals angeben, dessen Kern aus Produkten von trigonometrischen und Zylinderfunktionen besteht, wobei das Argument der letzteren irrational von dem Integrationsparameter abhängt. In Anlehnung an das Fouriersche Integraltheorem lassen sich unter Zugrundelegung dieser Lösung die üblichen Randwertaufgaben für den Bereich zwischen zwei koaxialen Zylindern behandeln, wenn an den Unstetigkeitsstellen von k^2 für die Lösung und ihre Ableitungen gewisse Uebergangsbedingungen vorgeschrieben sind. An die Stelle einer Randbedingung kann dabei auch die Forderung treten, daß die Lösung auch für $r = 0$ regulär sei, bezw. es können in dem unbegrenzten Außenraum eines Zylinders gewisse Forderungen über das Verhalten der Lösung im Unendlichen gestellt werden. Die angegebene Lösung erweist sich auch dann als verwendbar, wenn im Definitionsbereich gewisse Singularitäten vorgeschrieben sind.

Als Anwendung dieser Ergebnisse wird das Hertzsche Potential des Strahlungsfeldes eines elektrischen bezw. magnetischen Dipols aufgestellt, der auf der Axe eines

zwei verschiedene Medien trennenden Zylinders liegt. Der Integrand der Lösung besitzt im allgemeinen neben polaren Singularitäten vier Verzweigungspunkte, wird aber eindeutig und in der ganzen Ebene des Integrationsparameters meromorph, wenn man im Außenraum die Leitfähigkeit über alle Grenzen wachsen läßt. Durch Abschätzung der bei der Verlagerung des Integrationsweges auftretenden Integrale läßt sich die Lösung nach bekannten funktionentheoretischen Methoden in die Form einer unendlichen Reihe überführen, welche eine bequeme Diskussion des Potentials gestattet und auch einen Einblick in die auftretenden interessanten Resonanzerscheinungen gewährt.

LAMINARE AUSBREITUNGSERSCHEINUNGEN IN FLÜSSIGKEITEN

Von WILHELM MÜLLER, Prag

Unter den eindimensionalen (instationären) Bewegungen in zähen Flüssigkeiten sind in erster Linie die lineare, ebene oder achsensymmetrische und die ebene zirkulare bemerkenswert. Wenn wir mit v die Geschwindigkeit und mit w die Wirbelstärke (halbe Rotationsgeschwindigkeit), ferner mit y, bzw. r die ebene bzw. radiale Zylinder-Koordinate senkrecht zur Bewegungsrichtung und mit ν die kinematische Zähigkeit bezeichnen, so haben wir für den ebenen Fall die Gleichungen

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t}\,; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t}\,; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t}$$

und für den achsensymmetrischen Fall

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t}\,; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t}\,.$$

Zur Erleichterung der exakt ausführbaren Auflösung dieser auch in der Wärmeleitungstheorie vorkommenden Gleichungen liefert der Umstand, daß das Superpositionsprinzip Gültigkeit hat, vorausgesetzt, daß bei der Zusammensetzung die Linearität, Kreis- bzw. Achsensymmetrie gewahrt bleibt. Ferner sieht man, daß (3) aus (2) dadurch hervorgehen, daß die Stellungen von v und w vertauscht werden.

Im Interesse der Uebersicht geht man am besten von der bekannten Lösung für den zur Zeit $t = 0$ in $r = 0$ konzentrierten Elementarwirbel aus, mit deren Hilfe dann ohne weiteres die Systeme paralleler ebener und koaxialer kreiszylindrischer Wirbelschichten dargestellt werden können. Für die Bewegung z. B., die von einer zur Zeit $t = 0$ auf dem Kreiszylinder $r = a$ ausgebreiteten Wirbelschicht mit achsialgerichteten Wirbelachsen ausgeht, erhält man z. B. die Darstellung

$$(4) \qquad w = \frac{\gamma a}{4 \nu t} e^{-\frac{r^2+a^2}{4 \nu t}} \cdot I_0 \left(\frac{r a}{2 \nu t} \right)$$

wobei γ die Zirkulationsdichte der Schicht und I_0 die Besselsche Funktion nullter Ordnung mit rein imaginärem Argument bezeichnet. Die Umformung des Ausdrucks für die entsprechende zirkulare Geschwindigkeit führt auf unendliche Reihen mit Besselschen Funktionen rein imaginären Argumentes, die eine gewisse Analogie zeigen mit den von Lommel in seinen Arbeiten über Beugungserscheinungen aufgestellten Reihen und für viele hydrodynamischen Probleme von Bedeutung zu sein scheinen. Diese für alle endlichen r konvergenten Reihen lauten:

$$(5) \qquad U_n = \sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^m \cdot I_m \left(\frac{ar}{2 \nu t} \right), \quad V_n = \sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^m \cdot I_m \left(\frac{ra}{2 \nu t} \right).$$

Man erhält dann z. B. für die kreiszylindrische Wirbelschicht

$$(6) \qquad v = \frac{\gamma a}{r} e^{-\frac{a^2+r^2}{4 \nu t}} \cdot V_1 = \frac{\gamma a}{r} \left| 1 - e^{-\frac{a^2+r^2}{4 \nu t}} \cdot U_0 \right|.$$

Wie die genauere Diskussion ergibt, ist das Gebiet $r < a$ zur Zeit $t = 0$ in Ruhe, während die Geschwindigkeitsverteilung für $r > a$ der Beziehung $v = \frac{\gamma a}{r}$ entspricht. Die Ausdrücke (4) und (6) geben dann den Verlauf der zur Zeit t beginnenden Ausbreitung der Wirbelbewegung.

In ganz ähnlicher Weise läßt sich die von einer kontinuierlichen Folge von gleichgroßen und koaxialen Wirbelringen ausgehende Bewegung der Flüssigkeit ermitteln, die identisch ist mit der Ausbreitung eines kreiszylindrischen Strahles in dem umgebenden, anfangs ruhenden Medium derselben Art. Auch in diesem Fall ergibt sich für die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von r und t eine Reihendarstellung von der Form

$$(7) \qquad v = v_0 e^{-\frac{a^2+r^2}{4 \nu t}} \cdot U_1 = v_0 e^{-\frac{a^2+r^2}{4 \nu t}} (U_0 - I_0)$$

wenn v_0 die anfängliche Strahlgeschwindigkeit bezeichnet. Wenn der Strahldurch-

messer unendlich klein wird, gleichzeitig aber die durch den Querschnitt hindurchtretende Menge q endlich bleibt, erhält man daraus für den geradlinigen Fadenstrahl die Ausdrücke

$$(7a) \qquad v = \frac{q}{4\pi\nu t}\, e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \; ; \; w = \frac{q\, r}{16\pi(\nu t)^2}\, e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \, .$$

Auf die vielen einschlägigen mathematischen und mechanischen Fragestellungen wird der Verfasser in einem ausführlichen Bericht zurückkommen[1]).

PROGRESSI NEL SISTEMA DEFINITIVO DI UNITÀ

Di GIOVANNI GIORGI, Roma

Nel Congresso di Matematica di Toronto 1924, il delegato americano G. Campbell propose il nome di *sistema definitivo* pel sistema di unità assolute che fu proposto dallo scrivente nel 1901, e ne mostrò con esempi l'applicabilità generale. Questo sistema è fondato sul riconoscere che le unità elettriche pratiche ora in uso (volt, ampère, ohm, watt, farad, etc.) formano tutte un sistema assoluto in unione col metro, col kg.-massa e col secondo; e con questo si può fare a meno della complicazione dei due sistemi C. G. S., e si ottiene un insieme di unità che hanno tutte grandezza conveniente, e che sono collegate fra loro da formole razionalizzate.

Dopo il 1924, i progressi principali e le divulgazioni ulteriori e le proposte di aggiunte furono le seguenti: — A. E. Kennelly ha illustrato le basi teoriche sotto il nome di sistema M. K. S. Ω; — E. Pistolesi ha introdotto il nome *vis* per l'unità di forza; — la Commissione elettrotecnica internazionale fino ad ora non ha adottato il sistema, ma ha riconosciuto che deve ammettersi una quarta unità fondamentale; — le unità del sistema definitivo sono state adottate sistematicamente in molti trattati tedeschi; come il più recente citiamo quello del Kupfmüller (Einführung in die theoretische Elektrotechnik); in Italia il recente trattato di fisica dei Prof.ri Serini e Palatini è svolto con l'uso esclusivo del sistema definitivo.

Mi permetto richiamare l'attenzione dei fisici e degli elettrotecnici sull'argomento, e sollecitarli a fare uso del sistema in qualche loro lavoro, fiducioso che per questa via si riconosceranno i vantaggi di semplicità e risulterà gradualmente l'adozione generale.

---

1) Vgl. auch *Wilhelm Müller*, Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, Leipzig 1932.

SUR L'UNIVERS SPHÉRIQUE D'EINSTEIN

Par P. DRUMAUX, Gand

Diverses solutions ont, comme on sait, été proposées, notamment par Einstein et par de Sitter, au sujet de la forme de l'Univers, laquelle varie selon l'expression adoptée pour le carré de l'intervalle *ds* entre deux points-événements de manière à satisfaire aux équations de la gravitation dans la relativité généralisée et les solutions ainsi obtenues présentent entre elles de profondes divergences.

En partant de la remarque d'Einstein d'après laquelle les ultimes constatations expérimentales dans les mesures physiques portent exclusivement sur l'observation de coïncidences de points-événements, il est possible de montrer qu'il doit nécessairement exister une correspondance quantitative linéaire entre la masse totale d'un Univers sphérique à répartition macroscopiquement uniforme et la grandeur de son rayon, ce qui permet de faire une discrimination entre les théories proposées sur la forme de l'Univers et d'où résulte que la préférence doit être donnée à l'Univers d'Einstein.

De la remarque susdite d'Einstein concernant le caractère des mesures physiques on peut en effet déduire que si l'on considère d'une part la masse totale M associée à l'ensemble de l'Univers et d'autre part la longueur maxima associée à l'Univers, c'est-à-dire le demi-tour πR de l'Univers de rayon R, il doit y avoir proportionnalité entre cette masse et cette longueur, le coefficient de proportionnalité dépendant uniquement du choix des étalons de masse et de longueur et étant une constante d'une invariance absolue, ce qui conduit à la relation :

$$M = \frac{c^2}{2K} \pi R$$

où c est la vitesse de la lumière et K la constante de gravitation liée à la constante universelle $\varkappa$ d'Einstein par la relation

$$\varkappa = \frac{8\pi K}{c^4} .$$

L'Univers d'Einstein contient exactement la masse répondant à sa grandeur spatiale et satisfait à la condition de correspondance en question.

L'Univers de de Sitter défini par l'expression suivante du ds^2 avec les notations usuelles :

$$ds^2 = - dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} (d\theta^2 + \sin^2 \theta \, . \, d\varphi^2) + \cos^2 \frac{r}{R} c^2 dt^2$$

ne répond pas à cette condition et est donc physiquement impossible malgré son intérêt scientifique. Il en est de même de l'espace elliptique de Caley-Klein dont le volume est deux fois trop petit.

ALCUNE APPLICAZIONI MECCANICHE DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA DEGLI IPERSPAZÎ

Di CARLO LUIGI RICCI, Napoli

In molte questioni tecniche interessa studiare un sistema rigido soggetto a legami elastici, e ricercare la corrispondenza tra le forze ad esso applicate e gli spostamenti piccolissimi ad esso consentiti dai predetti legami elastici.

Tale corrispondenza fu da me studiata in due miei precedenti lavori: nel primo [1]) essa è trattata nel caso particolare in cui i legami elastici ammettano un piano di simmetria; nel secondo [2]) essa è studiata in generale, per via geometrica, rappresentando le *viti* (schemi geometrici delle *dinami* e dei *moti elicoidali)* come punti di un spazio a cinque dimensioni. — La corrispondenza tra le *viti* delle forze applicate e quelle degli *spostamenti elicoidali* prodotti, si ottiene come un' *omografia* (detta *di elasticità)* nel detto iperspazio: essa risulta come prodotto di due polarità: Ω_e, (*polarità di elasticità*) ed R, nella quale ultima sono coniugate le viti di *coefficiente virtuale nullo: la polarità* Ω_e è *uniforme*. Nello stesso lavoro [2]) si dimostra che anche per il corpo rigido libero, la corrispondenza tra forze impulsive impresse e moti elicoidali istantanei da esse provocati si può ottenere come un' *omografia* (detta *d'inerzia*), prodotto di una polarità uniforme Ω_i (*polarità d'inerzia*) e della polarità R sopra definita.

Con questi risultati si può risolvere un problema utile in molte questioni applicative riguardanti le macchine: la ricerca *delle oscillazioni di un sistema rigido soggetto a legami elastici.*

In un altro mio lavoro [3]) avevo già risolto questo problema nel caso particolare del sistema elastico avente solo *due gradi di libertà elastica:* avevo così *trovate due oscillazioni proprie o permanenti,* intorno a *due punti nodali* — (o *nodi*) — ottenuti come *coppia comune a due involuzioni ellittiche,* dette l'una di *elasticità* e l'altra *d'inerzia.*

Estendendo questo concetto, nel caso generale del sistema rigido con *sei gradi di libertà elastica*, le *oscillazioni proprie o permanenti* si ottengono come moti oscillatorî elicoidali secondo le *viti* che nelle omografie $[\Omega_e R]^{-1}$ ed $[\Omega_i R]^{-1}$ hanno uno stesso elemento (*vite*) corrispondente [4]).

[1]) *Carlo Luigi Ricci*, „L'ellisse di elasticità trasversale ....". R. Accademia delle Scienze di Torino, 1911.

[2]) *C. L. Ricci*, „Relazioni tra le forze e gli spostamenti per un sistema rigido soggetto a legami elastici". R. Accademia delle Scienze di Torino, 1911.

[3]) *C. L. Ricci,* „L'equilibramento delle masse rotanti a grande velocità". R. Accademia delle Scienze di Torino, 1916 (pag. 9—19 dell' estratto).

[4]) Queste *viti* coincidono con le così dette *viti armoniche,* trovate per altra via da Sir Robert Stawell Ball nel capitolo IX°, §§ 104—107, pag. 94—100 dell'opera A. Treatise on the Theory of Screws. University Press, Cambridge, 1900.

Si è così ricondotti e ricercare gli elementi corrispondenti comuni alle due polarità Ω_e ed Ω_i; e poichè tali polarità sono *uniformi*, è facile dimostrare che *detti elementi sono sempre reali.*

Dunque il sistema rigido soggetto a legami elastici, nel caso più generale ha sempre *sei oscillazioni proprie permanenti,* tutte reali.

Per le applicazioni è specialmente interessante il caso in cui i vincoli elastici ammettano un piano di simmetria, coincidente con uno dei piani principali d'inerzia del sistema rigido. In tal caso le oscillazioni proprie sono rotazioni intorno a sei rette, delle quali tre contenute nel detto piano di simmetria e tre a questo normali: la loro ricerca si riduce a quella dei triangoli autopolari comuni rispettivamente in due coppie di *polarità piane* (*di elasticità* e *d'inerzia*), nel detto piano di simmetria.

Ovvie semplificazioni si presentano quando si abbassa *il grado di libertà elastica* del sistema rigido.

SUR LES ONDES DE GRAVITÉ

Par ALFRED ROSENBLATT, Cracovie

L'étude des ondes de gravité, c'est-à-dire des ondes causées par l'émersion instantanée d'un corps ou par un coup instantané de vent, a été faite par divers savants éminents, en faisant les suppositions :

1) les vitesses et leurs dérivées sont petites,

2) la dépression initiale diffère peu de l'horizontale,

3) son inclinaison est petite,

on obtient en négligeant des membres d'ordre supérieur un *problème linéaire.*

J'ai abordé l'étude exacte du problème en supposant :

1) la dépression initiale est donnée par une fonction $y = f(x)$ qui possède toutes les dérivées s'annulant à l'infini,

2) ces dérivées sont intégrables absolument entre $-\infty$ et $+\infty$.

On pourrait remplacer ces conditions par d'autres bien plus générales.

En développant alors le potentiel φ suivant les puissances ε d'un *petit paramètre.*

(1) $$\varphi = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots$$

j'ai obtenu des expressions récurrentes pour les φ_i et j'ai démontré la convergence par la méthode des majorantes de Cauchy.

J'ai traité le cas plan, mais la même méthode s'applique au mouvement dans trois dimensions. De même les ondes dans un bassin à profondeur finie se traîtent de la même manière.

PROJET D'UNE EXPÉRIENCE DE LABORATOIRE PERMETTANT DE MESURER LA VITESSE V DE L'ATTRACTION UNIVERSELLE

Par E. KOGBETLIANTZ, Paris

Pour définir l'attraction exercée, dans l'hypothèse $V < \infty$, par une masse active M, mobile, sur une masse passive m, immobile, nous supposons que l'attraction émane de M et se propage vers m. Soit v la vitesse de M et posons $v = \beta . V$. Le retard causé par le fait que V est finie ajoute à tout moment à l'attraction newtonienne $F = f . m\, M r^{-2}$ une force complémentaire ΔF d'intensité $\Delta F = \beta F . \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}$ (à β^2 près), où φ est l'angle de v et de $r = \overrightarrow{mM}$. ΔF se trouve dans le plan (r, v), fait un angle ψ avec r, tel que $2 \mathrm{tg}\, \psi = \mathrm{tg} \varphi$ à β près ; et la résultante de F et de ΔF est dirigée vers une position antérieure de M.

Le calcul de l'effet causé par la rotation uniforme d'une masse M (ayant la forme d'un demi-tore creux) autour d'une balance de torsion spéciale (constituée par un fil en or de masse m répartie uniformément sur la circonférence d'un cercle de rayon b et dont le centre est sur l'axe du demi-tore tournant M) donne la valeur K du couple agissant sur la balance : $K = f \cdot \frac{mM}{2V} \cdot \frac{b\,\omega}{r_1 + r_2}$ où $f = 67$ Eotvos, ω est la vitesse angulaire de rotation de M, r_1 et r_2 étant les deux rayons de la section normale du demi-tore creux M.

Soit τ le coefficient de torsion du fil de suspension de la balance et θ sa déviation causée par la mise en rotation de M. On a $\theta . \tau = K$ et si $\tau = 0{,}027$, $M = 2$ tonnes, $m = 94$ grammes, $b = 100$ cms, $r_1 + r_2 = 20$ cms, $\omega = 60\,\pi$ (1800 tours à la minute), la déviation θ est supérieure à $1'', 5 \cdot \varrho$, où ϱ est le rapport de la vitesse de la lumière $c = 3.10^{10}$ à celle V de la gravitation : $\varrho V = c$. On constate que la mesure de V est possible si V est de l'ordre de grandeur de c. Nous avons supposé que la longueur du fil de suspension est d'un mètre. En l'allongeant et en perfectionnant la partie optique de la balance, on peut reculer la limite de V mesurable. Si ϱ est très petit, l'emploi d'un fil de suspension presque sans torsion permettrait, en prolongeant suffisamment l'expérience, de mesurer V. En effet, la déviation serait alors proportionnelle au produit de ϱ par le carré de la durée de l'expérience. On peut espérer de mesurer ainsi V même pour $\varrho = 10^{-3}$, c'est-à-dire pour $V \sim 1000c$.

CAN MATTER AND RADIATION BE REGARDED AS TWO ASPECTS OF THE SAME WORLD-CONDITION?

By A. M. MOSHARRAFA, Cairo

The present writer has recently put forward the view [Roy. Soc. Proc. A, Vol. 126, (1929), p. 35] that a material entity when viewed by an observer travelling with the velocity of light would be recognised by him as radiation, and has suggested that radiation would be interpreted by the same observer as a material phenomenon. These views were based on an investigation of the geometrical relationship between the Heaviside ellipsoids characterising the "particle" aspect of an electron and the de Broglie wave surfaces characterising its wave aspect. This relationship is described by the identity:

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z, t) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 + [W(x, y, z, t)]^2 / m_o^2 c^2$$

where $\varphi(x, y, z, t) =$ constant, and $W(x, y, z, t) =$ constant, represent the Heaviside ellipsoids and the de Broglie surfaces respectively. In another paper [Roy. Soc. Proc. A. Vol. 131, (1931), p. 335] an attempt is made to include material and radiational waves under one and the same scheme of fundamental relations. The Maxwellian equations of electrodynamics are derived from the set of relations:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial E_\mu}{\partial x_\nu} = \cos(n\, x_\nu)\, A_\mu \;, & \mu, \nu = 1, 2, 3 \\[2ex] \dfrac{\partial E_\mu}{\partial t} = \theta\, A_\mu & , \quad \mu = 1, 2, 3. \end{cases}$$

where (E_1, E_2, E_3) are the components of the electric field, and A, n, θ are two vectors and a scalar quantity, respectively, associated with the existence of a material or radiational entity. If A and n are in the same direction, the entity is recognised as a proton, if in opposite directions as an electron, and if mutually perpendicular, as a photon. Accordingly radiation would correspond to a mid-way position, so to speak, between positive and negative electricity. The derivation of the set of relations (2) is now discussed. It is shown that for a simple polarised entity possessing a uniform electric amplitude, such as plane-polarised radiation or a uniformly moving electron, the set is reducible to a system of identities. It is suggested that all material and radiational entities are built up of such simple entities in a manner corresponding to the building up of the wave function from a series of simple harmonic terms. It is pointed out that this would leave the validity of the classical equations of electrodynamics unimpaired on a macroscopic scale, but would render them invalid on the microscopic scale.

SULLA COSTRUZIONE DI COSTANTI FISICHE DI GRANDEZZA ARBITRARIA

Di L. LABOCCETTA, Roma

Esistono delle costanti fisiche naturalmente date, il cui valore è indipendente dalle dimensioni spaziali del sistema materiale che serve a definirle, quali: la pressione, la temperatura e la densità dei corpi allo stato critico od in corrispondenza nel punto triplo. Sono dunque definiti in modo assoluto i loro valori che costituiscono un insieme discreto e col sussidio dei quali possono poi essere definiti in modo assoluto degli insiemi corrispondenti di valori di altre grandezze fisiche, per es.: la velocità del suono in un gas, il modulo di elasticità di una sostanza, il suo „*tempo proprio*", secondo Maxwell [1]), etc.

Per quanto concerne le dimensioni spaziali, e le altre grandezze fisiche non date naturalmente, in tre casi diversi si può giungere alla determinazione del valore assoluto di esse partendo dalle proprietà fisiche, del corpo o del sistema nel quale si presentano:

1. Quando il sistema comprende un angolo che varia secondo una funzione nota delle dimensioni lineari del sistema stesso.

2. Quando il sistema comprende due elementi omogenei: a) geometrici; b) fisici; il cui rapporto varia al variare delle dimensioni lineari del sistema e secondo una funzione nota di esse.

È un esempio del caso 1) la definizione ottica del metro indicata in una mia comunicazione al precedente Congresso di Bologna [2]).

È un esempio del caso 1, a) la definizione statica (pondero elastica) del metro, qui omessa, alla quale si giungerebbe partendo dall'osservazione che mentre le forze elastiche (che sono forze superficiali) crescono col quadrato delle dimensioni lineari, le forze ponderali (che sono forze di massa) crescono invece col cubo delle stesse dimensioni [3]).

Costituisce un esempio del caso 2, b) l'adozione, come unità di misura della quantità di materia, dell'atomo elementare *a*, cioè dell'atomo di idrogeno [4]) e come unità di

---

[1]) *W. Thompson* and *P. G. Tait*, «Treatise on natural philosophy» new edition 1879, Vol. 1, p. 228.

[2]) Atti, Vol. V. p. 199 — *L. Laboccetta* «Metodo ottico per la determinazione di una unità assoluta di lunghezza di grandezza arbitraria».

[3]) Altre tre definizioni meccaniche del metro, una statica, una dinamica ed una termodinamica sono indicate nel mio scritto: «La similitudine meccanica di Galileo e la relatività dello spazio». L'Elettrotecnica 5 e 15—25 Agosto 1932, nel quale scritto sono enunciati ed illustrati i principi 1), 2 a), 2 b).

[4]) Per questa unità di misura v. *L. Laboccetta* «Una nuova enunciazione della legge di Newton sull'attrazione dei corpi materiali». Atti della Pont. Acc. delle Scienze Nuovi Lincei, 15 Maggio 1932.

lunghezza della distanza λ fra due atomi elementari in un corpo di riferimento, l'acqua normale ad esempio. Con queste unità di misura il rapporto fra la densità di un corpo dato e la densità del corpo di riferimento determina in modo assoluto una lunghezza, la distanza fra gli atomi elementari del corpo dato, ed anche il tempo proprio che ad esso corrisponde.

Si possono così in modo continuo far corrispondere un tempo e una lunghezza: il tempo periodico proprio di una sostanza data e la distanza fra gli atomi elementari che corrisponde alla densità di essa.

Oltre che alla costruzione di unità assolute di lunghezza e di tempo di grandezza arbitraria variabili in modo continuo, può servire il metodo anzidetto a rendere continui gli insiemi discreti di valori di altre grandezze naturalmente definite indipendentemente dalle dimensioni lineari, come ad es. alla definizione assoluta dei valori delle temperature intermedie fra quelle fisse di riferimento mediante il rapporto di due densità (del liquido e del suo vapore saturo).

SUR LA LIGNE D'UNIVERS DES SYSTÈMES CONSERVATIFS

Par Z. HORÁK, Prague

Le problème d'interpréter les équations du mouvement de systèmes matériels dans l'espace-temps généralisé a été traité pour la première fois par M. E. Cartan [1]) et récemment par MM. L. P. Eisenhart [2]), T. Lewis [3]), par l'auteur [4]) et par M. Wundheiler [5]). Ici, je me borne à signaler un mode de représentation du mouvement des systèmes conservatifs par des « lignes d'univers » tracées dans l'espace-temps riemannien à $n+1$ dimensions dont l'élément linéaire est défini par la forme (je supprime les chiffres de sommation)

$$d\sigma^2 = g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda dx^\mu + 2\, V dt^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \,, \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n;\ \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \ldots n)$$

où

$$g_{00} = 2\, V(x^\lambda) \,, \ g_{0\lambda} = g_{\lambda 0} = 0 \,,$$

---

[1]) Leçons sur les invariants intégraux, Paris, 1922.

[2]) Ann. of Math., 30 (1929) p. 591 606.

[3]) Phil Mag VII s., 11 (1931) p. 753—760.

[4]) C.R. Acad. Sc. Paris, 192 (1931) p. 1203 1205.

[5]) Prace mat.-fiz., 38 (1931), Warszawa, p. 129—147.

V désignant le potentiel, $T = \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu$ la demi-force vive, de sorte que $T + V = E = \text{const.}$ Si l'on identifie le paramètre temporel t avec le temps absolu de Newton, on aura $d\sigma = \sqrt{2E}\, dt$. Introduisons de plus le vecteur courbure de la ligne d'univers du système aux composantes covariantes :

$$\varkappa_\alpha = \frac{d}{d\sigma}\left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\sigma}\right) - \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ \gamma \end{bmatrix} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} ,$$

ce qui rend possible d'écrire les équations du mouvement sous la forme :

(1) $$E\varkappa_\alpha = X_\alpha$$

où le vecteur espace-temporel X_α est défini par les composantes

$$X_\lambda = -\frac{\partial V}{\partial x^\lambda} , \quad X_0 = -X_\lambda \dot{x}^\lambda .$$

En l'appelant « force complète », on arrive au théorème : *Le vecteur courbure de la ligne d'univers d'un système conservatif, multiplié par son énergie totale, est égal à la force complète.*

Remarques : 1. Si l'on introduit au lieu de V la fonction plus générale

$$\Phi(x^\lambda, t) = V(x^\lambda) + \tau(t)$$

où τ signifie la demi-force vive exprimée en fonction de la seule variable t, les équations (1) deviennent

$$E\varkappa_\alpha + \text{grad}_\alpha \Phi = 0 .$$

2. Les équations (1) peuvent être résumées en un principe stationnaire :

$$\delta \int (\Theta - \Phi)\, d\sigma = 0$$

où

$$\Theta = \frac{E}{2} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} .$$

3. La métrique que j'ai adoptée est identique au fond à celle de MM. Eisenhart et Lewis ; cependant leurs résultats diffèrent des miens ce qui s'explique par le fait, que le paramètre temporel u, introduit par ces auteurs, est lié aux paramètres x^λ, t par relations non intégrables. En effet, si l'on se sert, pour les géodésiques, des équations généralisées pour les paramètres non holonomes [1]), on arrive aux résultats indiqués ci-dessus.

---

[1]) Horák, Z.: Nieuw Archief v. Wisk., **15** (1927) p. 193—201.

DÉMONSTRATION DU PRINCIPE DE LA VARIATION DE L'EFFET D'UNE ACTION SUR UN CORPS MOBILE AVEC LA VITESSE DE CE CORPS

Quelques considérations sur ce sujet

Par F. M. DA COSTA LOBO, Lisbonne

A cause de récentes découvertes on a mis en doute le principe fondamental de la mécanique, de Newton, qui enseigne que les effets d'une force sur un corps mobile sont indépendants de la vitesse acquise par ce mobile, car on trouve quand il s'agit des vitesses de dizaines et de centaines de milliers de kilomètres, que ces effets seront d'autant plus petits que la vitesse acquise par le corps sera plus grande.

Pour expliquer ce fait on a admis que la masse d'un corps matériel varie avec sa vitesse (ce que je suppose inaccessible à notre raison). Pourtant je crois pouvoir donner une démonstration simple et claire de ce que le principe de Newton est une approximation suffisante quand on a affaire à des masses considérables relativement à celles qui agissent, et que le fait observé constitue un principe général.

Soient, M et v respectivement la masse et la vitesse d'un corps matériel, v étant la vitesse de chacun de ses points ; m une masse qui agit sur M avec une vitesse v_1, qui sera la vitesse de chacun de ses points.

Supposons pour simplifier que les points des corps M et m suivent dans la même direction. Il y a deux cas à considérer: 1º Les corps suivent dans le même sens; 2º Les corps suivent dans des sens opposés.

1º: Il faut supposer $v_1 > v$ pour que le corps de masse m atteigne le corps de masse M. Quand ce fait arrivera, le corps de masse M marchera avec la vitesse v_2, dont la plus grande valeur sera rendue par l'expression

$$v_2 = \frac{Mv + mv_1}{M + m} \tag{1}$$

qu'on a déjà trouvée à propos d'autres questions.

La relation entre l'augmentation de la vitesse de la masse M et la vitesse dont cette masse était animée sera,

$$\frac{\frac{Mv + mv_1}{M + m}}{v} = \frac{m(v_1 - v)}{(M + m)v} \tag{2}$$

Cette expression démontre que l'augmentation de la vitesse de M relativement à la vitesse que cette masse possédait est d'autant plus petite que cette vitesse est plus grande.

Mais si la masse m est trop petite relativement à la masse M, on pourra négliger m dans le dénominateur de (1) et alors l'augmentation de la vitesse du mobile est donnée par l'expression,

$$\frac{m\, v_1}{M}$$

laquelle démontre que la variation de la vitesse est alors indépendante de la vitesse du mobile.

2⁰: On devra mettre dans les expressions ci-dessus $-v_1$, au lieu de $+v_1$, et alors la diminution de la vitesse de M relativement à sa vitesse v sera donnée par l'expression

$$(3) \qquad \frac{v - \dfrac{Mv - mv_1}{M+m}}{v} = \frac{m\,(v+v_1)}{(M+m)\,v} = \frac{m\left(1+\dfrac{v_1}{v}\right)}{M+m}$$

On reconnaît que la diminution de la vitesse du mobile sera d'autant plus petite que sa vitesse sera plus grande.

Il est facile de constater la raison pour laquelle j'ai trouvé comme principe général la conclusion déduite de l'observation des mouvements corpusculaires, et pourquoi la mécanique classique était en défaut. Celle-ci ne prend pas en considération la nature même des actions agissantes.

Je fus conduit à envisager ce problème, comme je viens de le faire, en prenant en considération le principe fondamental que j'ai proposé pour la structure de l'Univers, basé sur les phénomènes de la radioactivité:

« L'Univers est un ensemble de points matériels qui possèdent le *minimum* de matière, et qui, libres de liaisons, possèdent le *maximum* de vitesse cinétique. Quelles que soient les modifications subies par leur mouvement, la somme des énergies cinétiques et internes reste constante. »

EXTENSION DU THÉORÈME DE LIOUVILLE-PICARD AUX INTÉGRALES DE L'ÉQUATION DE FOURIER

Par MIRON NICOLESCO, Cernăuti (Roumanie)

Les analogies entre les fonctions harmoniques à deux variables et les intégrales de l'équation de Fourier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

ont été mises en évidence surtout par M. E. Holmgren, dans des travaux aujourd'hui classiques. Dans cette communication je donne, pour prolonger la série des analogies, un théorème qui jouera pour l'équation (1) le même rôle que le théorème de Liouville-Picard pour l'équation de Laplace.

Soit $u(x, y)$ une intégrale de (1), régulière dans le demi-plan $y \leqq Y$. Je considère, dans ce demi-plan, la bande infinie limitée par les droites $y = h, y = h + \delta = \eta$. Je suppose que, dans cette bande, les produits

$$u(x, y)\, e^{-Kx^2}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot e^{-Kx^2} \qquad \left(0 < K < \frac{1}{4\delta}\right)$$

soient bornés. On a alors la formule bien connue

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{4\delta}} u(\alpha, h)\, d\alpha \qquad (2)$$

où (ξ, η) est un point quelconque de la droite $y = \eta$.

Je fais tout d'abord remarquer que la formule (2) subsiste si l'on suppose $\frac{\partial u}{\partial x} e^{-Kx^2}$ borné seulement dans l'une des demi-bandes limitées par les deux droites ci-dessus et une parallèle quelconque à l'axe des y.

En second lieu je démontre le théorème suivant:

Soit $u(x, y)$ une intégrale de l'équation (1), *régulière dans le demi-plan $y \leqq Y$ (Y quelconque). Supposons que dans ce demi-plan $u(x, y)$ soit bornée, et qu'il en soit de même de $\frac{\partial u}{\partial x}$ dans l'un des angles droits délimités dans ce demi-plan par une parallèle quelconque à l'axe des y.*

Dans ces conditions on peut affirmer que $u(x, y)$ est une constante dans le demi-plan considéré.

La démonstration repose sur la formule (2), dont on déduit, en supposant $u(x, y)$ bornée par $M(\delta)$ dans la bande considérée,

$$\left| \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right| < \frac{M(\delta)}{\sqrt{\pi \delta}} . \tag{3}$$

Si l'on fait tendre δ vers l'infini, et que l'on suppose $M(\delta)$ borné pour $\delta = \infty$, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

et, par l'équation (1)

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

donc u est une constante dans le domaine considéré.

SUR LE THÉORÈME DES DEUX DÉPLACEMENTS ÉLASTIQUES GÉNÉRALISÉ EN VUE DE SON APPLICATION AU CALCUL DES CONSTRUCTIONS CONTINUES

Par FARID BOULAD BEY, Le Caire (Egypte)

L'auteur donnera une démonstration purement géométrique du théorème ci-après et indiquera la manière de l'appliquer au calcul des portiques, etc., conjointement avec son théorème des deux déplacements angulaires.

Considérons une poutre plane $A M_1 M_2 B$ à fibre neutre courbe et à paroi pleine ou à treillis dont l'appui de gauche A est une articulation fixe tandis que l'autre appui B est une articulation libre de glisser sur une droite BD. Appliquons seulement au tronçon de droite $M_2 B$ de cette poutre un système quelconque de forces ou couples fixe ou mobile; aucune force ou couple n'étant appliqué à l'intérieur de l'intervalle $A M_1 M_2$.

Si Δx_1 et Δx_2 représentent les projections respectives sur un axe quelconque AX, des deux déplacements élastiques linéaires des deux points M_1 et M_2 de cette poutre et y_1 et y_2 les distances de ces deux points à cet axe, la différence $\left(\frac{\Delta x_1}{y_1} - \frac{\Delta x_2}{y_2}\right)$ *est proportionnelle à la réaction de l'appui A de direction invariable.*

Ce théorème subsiste dans le cas où l'articulation B est fixe et l'autre articulation de gauche A est libre de glisser sur une droite quelconque AD, et en prenant l'axe AX perpendiculaire à cette droite.

Dans le cas particulier où cette poutre repose librement sur deux appuis horizontaux A et B, le théorème général ci-dessus se réduit au théorème que nous avons déjà indiqué, « Nouveau théorème sur les déplacements élastiques etc. » *(C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris, Séance du 13 juillet 1914);* « Sur le calcul des poutres continues » *(C. R. du Congrès du Havre de l'Ass. Franç. Avan. Sc. de 1914);* qui permet de ramener immédiatement le calcul direct des réactions des appuis d'une poutre continue à la résolution d'un système d'équations linéaires étagées. En outre, lorsqu'on connaît les lignes d'influence des flèches relatives à deux points d'une poutre à deux appuis simples, il permet de déterminer aisément les ordonnées de la ligne d'influence des flèches relatives à un point quelconque compris entre ces deux points.

LOI EXPÉRIMENTALE SUR LES DYNAMOMÈTRES À ALLONGEMENTS STATIQUES PROPORTIONNELS AUX POIDS SUSPENDUS.

Par A. MEYER-JACCOUD, Zurich

« L'expérience est son propre critère. »
STUART MILL.

Nous présentons ici les conséquences de la loi expérimentale sur les dynamomètres à allongements statiques proportionnels aux poids suspendus.

Cette loi expérimentale s'exprime de la manière suivante:

$$F_d^2 = f\,(h + F_d)$$

où h est la hauteur de chute libre, $h = g\frac{t^2}{2}$ d'un poids tombant sur le dynamomètre et f la flèche statique de ce poids; F_d la longueur dont la flèche statique est dépassée lorsque ce poids tombe d'une hauteur $(h + f)$, si $h = 0$, $F_d = f$.

La conséquence mécanique de cette loi est la suivante:
Le principe de la conservation de l'énergie s'exprime par

$$mg\,2\,(h + F_d) = mg\,\frac{F_d}{f}\cdot 2\,F_d$$

et non comme le veut la théorie de Poncelet sur cette étude par l'égalité

$$mg\,(h + f + F_d) = mg\,\frac{F_d + f}{2\,f}\,(F_d + f)$$

l'égalité expérimentale exprime que la durée de chute est plus grande que la durée de chute $t = \sqrt{\frac{2\,(h + f + F_d)}{g}}$ de Poncelet

soit $$t = \sqrt{\frac{4\,(h + F_d)}{g}} > \sqrt{\frac{2\,(h + f + F_d)}{g}}$$

résultat évident puisque la résistance du ressort augmente la durée de chute.

PHILOSOPHIE UND GESCHICHTE

NICOLAS KOPERNIK ET LA BOHÊME

Par QUIDO VETTER, Prague

Le célèbre historiographe tchèque François Palacký (en 1831) a appelé l'attention sur le noble tchèque du XIVe siècle nommé Udalricus Koprník (village au nord-est de la Bohême), énonçant l'hypothèse que le grand astronome Kopernik était parent de ce noble tchèque.

La copie de la lettre de Kopernik à Wapowski fut remise en 1575 par Thaddée Hájek de Hájek à Tyge Brahe. Les autres astronomes en prirent connaissance de ses copies. Aujourd'hui on connaît en somme cinq copies de cette lettre. L'une d'elles se trouve dans le codex de Savile à Oxford. Celle-ci pourrait aussi descendre de Thaddée Hájek, car Savile connaissait bien Thaddée Hájek et même il le vint voir à Prague. Le fils de Hájek étudiait en Angleterre, ce qu'on sait de la correspondance d'Andrée Dudič à Thaddée Hájek. Une autre copie était à Strasbourg et y fut détruite pendant la guerre de 1870. Mais sa copie faite par Ant. Maciejowski fut conservée. Cette copie est achevée en ces termes :

« Descripta Pragae ex D. Hagecii exemplari mense Januario MDXXXI. » Il ne faut pas supposer une erreur de copiste dans la date, et lire MDLXXI ou MDLXXXI, comme L. A. Birkenmajer le fait, en considération de cela que Thaddée Hájek n'avait que six ans en 1531. Thaddée Hájek signait depuis 1562 conséquemment Doct. Thaddée Hájek. Dominus Hájek aurait pu être son père, Siméon Hájek, né environ 1489, reçu bachelier en 1509, (Monum. univ. Pragensis, lib. dec., pars II, p. 228), mort en 1551 (P. Lupáč z Hlavačova : Ephemerides, 29 Oct. 1551). C'était un homme très érudit, collectionneur d'anciens livres et manuscrits (J. Teige : Základy starého místopisu pražského, vol. I, 882, no. 71). Le bachelier Siméon Hájek, partisan fervent de Mag. Johannes Hus, s'occupait de l'alchymie et l'astrologie, se fit luxurieusement orner sa salle d'études en 1518 des symboles et épigraphes alchymiques et astrologiques (Meric Casaubonus : A True & Faithfull Relation ... of John Dee, 1659, p. 212). Les nombreuses relations entre la Bohême et la Pologne dans la première moitié du XVIe siècle nous rendent vraisemblable que la lettre à Wapowski put arriver en Bohême.

La copie du Commentariolus de Kopernik que Thaddée Hájek donna à Tyge Brahe en 1575, Hájek ne dut pas obtenir à Vienne pendant ses études comme Birkenmaier pense, ce peut être aussi son père Siméon qui la reçut avec la lettre à Wapowski ou enfin Thaddée Hájek même directement de ses amis qui étaient en relations avec Kopernik, p. e. de Georges Joachime Rhaeticus qu'il connaissait très bien

(Th. Hagecius: Metoposcopia, 1563, Correspondance d'Andrée Dudič à Thaddée Hájek).

Le manuscrit pragois de l'œuvre principale de Kopernik était la propriété de Jean Amos Komenský jusqu'entre mille-cinq-cent-quarante et cinquante, ensuite l'acquit Otto baron de Nostitz, fondateur de la branche des Nostitz de Rokytnice. Après sa mort, il passa dans la bibliothèque des Nostitz de Rhieneck.

Le rapport de l'existence du manuscrit à Prague fut publié en 1788 par F. K. Hirsching d'après le matériel fourni par le prêtre pragois P. J. Bartsch, en 1795 par J. Schaller, en 1840 par Charles S. Amerlig et d'après ce dernier la même année par A. J. Rosciscewski. (Q. Vetter: Sur les destins du Manuscrit pragois du Kopernik „De revolutionibuc orbium caelestium libri sex, Vestník Král. Spol. nauk, Tř. II, 1931.)

REKURSIVE FUNKTIONEN

Von RÓZSA POLITZER, Budapest

Die rekursiven, d. h. aus gewissen einfachen Ausgangsfunktionen durch eine endliche Kette von Substitutionen und Rekursionen entstandenen zahlentheoretischen Funktionen wurden öfters als Hilfsmittel zu verschiedenen Untersuchungen herangezogen; namentlich von Hilbert und Ackermann (vgl. Math. Annalen, 95, S. 161 und 99, S. 118) zum Kontinuumproblem und neulich von Gödel (Monatshefte f. Math. u. Phys., 38, S. 173) zu seinen wichtigen Untersuchungen über die Unbeweisbarkeit gewisser Widerspruchsfreiheitssätze. Ich untersuche diese Funktionen — die ja die durch die wichtigste Definitionsmethode der Mathematik entstehenden Funktionen im Bereich der positiven ganzen Zahlen sind — an und für sich selbst.

Als Ausgangsfunktionen wählt man zweckmäßig die Funktionen 0 und $x + 1$, die schon bei Peano als die Grundbegriffe der Arithmetik (auf die alle übrigen Begriffe zurückgeführt werden) dienen; dies geschieht auch bei Gödel und im wesentlichen auch bei Hilbert. Eine Abweichung findet man aber bei den zugrunde gelegten Begriffen der Rekursion. Abgesehen davon, daß bei Hilbert auch höhere Funktionentypen, also Funktionen, deren Argumente nicht die positiv ganzen Zahlen durchlaufen, zugelassen werden (was sehr wichtig für seinen Ansatz zum Kontinuumproblem ist, was aber wir jetzt von vornherein ausschließen wollen), ist bei Hilbert den Argu-

menten, die nicht in der Rekursion teilnehmen, eine andere Rolle gegeben als bei Gödel, so daß die Hilbertsche Definition der Rekursion wesentlich allgemeiner als die Gödelsche ausfällt. Ich zeige indessen, daß dieser Umstand den Umfang der rekursiven Funktionen nicht beeinflußt, mit anderen Worten, die Klasse der im Gödelschen Sinne rekursiven Funktionen identisch ist mit der nach Hilbert auf der ersten Stufe (d. h. ohne höhere Funktionstypen) definierten rekursiven Funktionen. Mit Hilfe dieser Resultate ergibt sich ein einfacherer Beweis dafür, daß eine von Ackermann zu diesem Zweck konstruierte Funktion nicht rekursiv ist. Ein anderes Beispiel einer Funktion dieser Art läßt sich durch direkte Anwendung des Diagonalverfahrens (die Ackermannsche Konstruktion kann man nämlich als ein modifiziertes Diagonalverfahren auffassen) angeben; die Konstruktion dieser Funktion fällt prinzipiell nicht komplizierter als die Ackermannsche aus, und der Beweis, daß dieselbe nicht rekursiv ist, ist unmittelbar.

Ferner zeige ich, daß auch eine weitere Verallgemeinerung des Begriffes der Rekursion, bei der zur Berechnung des Funktionswertes an einer Stelle nicht nur der nächstvorangehende Funktionswert, sondern auch die früheren herangezogen werden, ohne Einfluß auf die Klasse der rekursiven Funktionen ist. Das gleiche gilt für eine *Einengung* des Rekursionsbegriffes, die darin besteht, daß man Rekursion nur zur Definition von Funktionen eines Argumentes anwendet, dafür aber weitere Funktionen als Ausgangsfunktionen hinzunimmt; oder daß man, ohne neue Ausgangsfunktionen zu brauchen, die Rekursion nur zur Definition von Funktionen von höchstens vier Argumenten benützt.

ZUM ENTSCHEIDUNGSPROBLEM DER MATHEMATISCHEN LOGIK

Von LÁSZLÓ KALMÁR, Szeged

1. Mein Ziel ist, das Entscheidungsproblem des engeren logischen Funktionenkalküls auf die Erfüllbarkeitsfrage von Zählausdrücken zurückzuführen, die eine möglichst einfache Struktur besitzen. In diesem Sinne beweise ich den folgenden Satz.

I. *Die Frage der Erfüllbarkeit eines beliebigen Zählausdruckes läßt sich auf die analoge Frage für die Zählausdrücke mit einem Präfix von der Form*

$$(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_m)(x_{m+1})(x_{m+2})(Ex_{m+3})(x_{m+4})(x_{m+5})\ldots(x_n) \qquad (1)$$

und mit einer einzigen Funktionsvariablen zurückführen.

Der Gedanke des Beweises ist folgender. Wie ich bereits bewiesen habe (Acta Scient. Math. 5 [1932], S. 222—236), darf man sich auf binäre Zählausdrücke $\mathfrak{A}$ mit einem Präfix von der Form (1) beschränken. Man betrachte als neuen Individuenbereich J^* die Vereinigungsmenge des alten Individuenbereiches J und der Menge aller logischen Funktionen über J; die Aussage $F(x, y)$ schreibe man in der Form $W(F, x, y)$, wobei W eine universelle Funktionsvariable bezeichnet; die alte Funktionsvariable F wird nunmehr eine Individuenvariable. Hierzu wurde bloß ein Teil des Wertevorrats der ternären Funktion $W(u, x, y)$ verwendet; den übrigen Teil definiere ich so, daß die Elemente x von J durch die Aussage $W(x, x, x)$ charakterisiert werden können. Man sieht unmittelbar ein, daß die Erfüllbarkeit von $\mathfrak{A}$ in J mit der Erfüllbarkeit eines anderen Zählausdruckes $\mathfrak{B}$ in J^* gleichbedeutend ist, der wiederum ein Präfix von der Form (1) besitzt und die einzige Funktionsvariable W enthält.

2. Der so gewonnene Zählausdruck $\mathfrak{B}$ ist ternär. Mit Hilfe des bekannten Löwenheimschen Kunstgriffes der Paarbildung (Math. Annalen, 76 [1915], S. 463—470), kombiniert mit dem obigen Gedankengang und einigen weiteren Kunstgriffen, gelangt man aber zum folgenden Satz.

II. *Das Entscheidungsproblem läßt sich auf die Frage der Erfüllbarkeit von Zählausdrücken mit einem Präfix von der Form*

$$(2) \qquad (Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_m)(x_{m+1})(x_{m+2})(Ex_{m+3})(Ex_{m+4})(x_{m+5})(x_{m+6})\ldots(x_n)$$

zurückführen, die eine einzige ***binäre*** *Funktionsvariable enthält.*

ON GENERAL KRONECKER-(INTEGER)-SYNTHESIS OF DISCIPLINES

By ALFRED L. FOSTER, Göttingen

The aim of the present communication is to establish certain foundations fundamental in any integer synthesis or analysis (in the sense of Kronecker); i. e., in the construction (or reduction) of mathematical disciplines as integer-disciplines. (Cf. a recent paper of J. Stein's, in which the disciplines [1] rational arithmetic and [2] Gauss-complex-number arithmetic are Kronecker-reduced in a satisfactory way.) The problem is approached through the questions: How can we construct a general type (e. g., positive-negative, rational, real etc.) of *number,* and how can we construct a general type of discipline within such a "number" system?

The question reduces largely to the construction and study of (1) equivalence-functions (e. g. the "identical" [or "facsimile"] equivalence $n = n$ of arithmetic; or again, for example, the familiar "derived" equivalence $\asymp$ which says $m/n \asymp m/n$ if $mn = mn$), and (2) equivalence-conserving functions (essentially functions which, for equivalent arguments, take on equivalent values.) In (1) a general and powerful method of mathematical construction of equivalence functions is discovered in a certain "covering" process closely associated with associative Abelian systems (not necessarily *groups*) of transformations.

The development is kept abstract as far as possible, and proceeds from an extremely primitive axiomatic ("objects", "characteristics" [or "Merkmale"], "basic equivalence function"). As yet merely certain simple special "denumerable" cases opened up by this theory have been considered. Besides familiar disciplines, other interesting cases present themselves. To what extent the theory will also prove fruitful in the "non-denumerable" cases cannot as yet answered.

DIE BEZIEHUNG VON GRUND UND FOLGE IM GEBIETE DER ELEMENTAREN LOGIK

Von KARL DÜRR, Zürich

Es sind in moderner Zeit zwei Theorien aufgestellt worden, die es erlauben, die Beziehung von Grund und Folge in exakter Weise zu bestimmen; die eine dieser beiden Theorien ist dargestellt in dem „Tractatus Logico-Philosophicus" von L. Wittgenstein, die andere in den „Grundzügen der theoretischen Logik" von D. Hilbert und W. Ackermann. Von diesen beiden Theorien ist die erste mehr philosophischer, die zweite mehr technisch-mathematischer Art; um so bedeutsamer ist die Tatsache, daß sie in ihren Ergebnissen durchaus übereinstimmen.

Der Theorie Wittgensteins liegen die beiden eng zusammengehörigen Begriffe des Elementarsatzes und des Sachverhaltes zugrunde.

Für die Theorie ist es wesentlich, daß die Menge aller Elementarsätze als gegeben betrachtet werden darf; dabei ist n, die Zahl dieser Sätze, als endlich zu denken.

Auf Grund dieser Voraussetzung wird es möglich, alle Sätze, die sich bilden lassen, zu überschauen, und ihre Zahl mit Hilfe der Kombinatorik zu berechnen.

In diesem Zusammenhang läßt sich auch angeben, was unter den Wahrheitsgründen

eines Satzes zu verstehen ist; dadurch wird folgende Definition möglich: „aus A folgt B" bedeutet: „alle Wahrheitsgründe von A sind Wahrheitsgründe von B".

Anwendungen der Definition des Folgens:

1) aus „A, und wenn A, so B" folgt B.
2) sind A und B zwei verschiedene elementare Sätze, so folgt weder A aus B, noch B aus A.

Dem Begriffe des Elementarsatzes entspricht in dem Systeme Hilberts der Begriff der Grundaussage.

Es wird von Hilbert ein Verfahren genannt, das es ermöglicht, alle „ausgezeichneten konjunktiven Normalformen" zu bilden; dabei spielen bestimmte logische Grundverknüpfungen, nämlich Negation, Disjunktion und Konjunktion eine Rolle.

Die Kombinatorik kommt in analoger Weise zur Anwendung wie im Systeme Wittgensteins.

„Aus A folgt B" bedeutet hier: „alle Konjunktionsglieder von B sind Konjunktionsglieder von A".

Wittgensteins und Hilberts Definitionen des Folgens decken sich.

Die Theorie Hilberts läßt sich mit Hilfe der Theorie Wittgensteins beweisen.

A. L. CAUCHY NELLA STORIA DELLA GEOMETRIA ANALITICA

Di GINO LORIA, Genova

Nel suo lavoro intitolato *Da Descartes e Fermat a Monge e Lagrange, contributo alla storia della geometria analitica* (Mem. della R. Acc. Nazionale dei Lincei, Ser. V, Vol. XIV, 1924) l'autore ha studiato il primo periodo di vita della geometria analitica. Era suo intendimento di continuare tale indagine, considerandone le seguenti fasi di sviluppo; ma fu momentaneamento distolto avendo intrapresa la reduzione della sua *Storia delle Matematiche*. Avendo compiuto tale nuovo lavoro (il III ed ultimo volume trovasi attualmente in corso di stampa) egli ha ripreso l'antico progetto e delle relative ricerche egli presenta un saggio in questa comunicazione, destinata a far conoscere quali perfezionamenti il metodo cartesiano debba a A. L. Cauchy. Per caratterizzarli egli rileva che le questioni di geometria analitica a cui si dedicarono di preferenza i matematici durante il primo quarantennio dello

scorso secolo sono la trasformazione delle coordinate oblique e la teoria delle superficie di secondo ordine. Ad entrambe Cauchy diede contributi rilevanti, sempre ispirandosi al concetto (che lo animò durante tutta la sua carriera scientifica) di perfezionare nella sostanza e nella forma quanto era stato pensato e scritto dai predecessori; notevoli le sue considerazioni sui segni delle figure e sull' applicazione dei determinanti alla geometria, come pure una nuova forma sotto cui giova scrivere le equazioni di una retta nello spazio e un' espressione, di grande generalità, del coseno dell' angolo di due rette.

ÜBER DIE AXIOME DER TEILMENGENBILDUNG

Von ADOLF FRAENKEL, Kiel

Tritt man vom axiomatischen Standpunkt oder von dem der Principia Math. an die Frage der *Teilmengen* einer Menge M heran, so zeigen sich zwei mögliche Arten von Teilmengen: die Teilmengen, die sich durch bestimmte Eigenschaften (Prädikate, Relationen, Aussagefunktionen) gewisser Elemente von M definieren lassen, und ferner solche, bei denen das — mindestens einstweilen — nicht tunlich ist, die aber einem Typus entsprechen, von dem Vertreter unter den Teilmengen von M *nicht ganz fehlen* sollen. Im Axiomensystem *Zermelos* entspricht beiden Arten das Aussonderungsaxiom und das Auswahlaxiom.

Hinsichtlich des *Aussonderungsaxioms* haben *Skolem* und der Vortragende Wege angegeben, um den unscharfen Eigenschaftsbegriff entweder mit Hilfsmitteln der symbolischen Logik oder mittels eines mathematischen, auf die anderen Axiome gestützten Funktionsbegriffs *definitorisch* zu präzisieren. *Zermelo* sucht neuerdings den Eigenschaftsbegriff, unabhängig vom Mengenbegriff, als neuen *axiomatischen Grundbegriff* einzuführen. Hiergegen spricht, abgesehen von anderen Erwägungen, namentlich auch der Umstand, daß dann ein „Beschränktheitsaxiom" notwendig wird, also ein Axiom von der Art der „Postulate", gegen die neuerdings berechtigte Einwände erhoben worden sind.

Bezüglich des *Auswahlaxioms* wissen wir zwar, besonders dank den Arbeiten des Warschauer Kreises, viel über gleichwertige Sätze, aber noch wenig über seine Notwendigkeit überhaupt, d. h. über seine *Unabhängigkeit* von den übrigen anerkannten Konstruktionsprinzipien. Beschränkt man sich auf die der Mathematik bezw. der Mengenlehre unentbehrlichen Objekte, d. h. der Sache nach wesentlich

auf die natürlichen Zahlen als Ausgangspunkt zu allem Weiteren, so ist über die Unabhängigkeit bis heute nichts bekannt. Läßt man dagegen, wie *Zermelo* es tut, beliebige Objekte als Ausgangspunkt zu, so kann man relativ zu geeigneten Existenzannahmen über solche Objekte das Auswahlaxiom sogar im einfachsten Fall — der Auswahl aus (eventuell nur abzählbar vielen) *endlichen* Mengen — als *unabhängig* erweisen und daraus weitere Folgerungen ziehen. Damit wird die Frage brennend, ob dieser einfachste Fall etwa den allgemeinen nach sich zieht. Durch Konstruktion eines geeigneten Bereiches von Objekten, in dem neben den übrigen Axiomen auch jenes einfachste Auswahlaxiom erfüllt ist, und durch Untersuchung der Struktur aller in diesem Bereich möglichen Mengen gelingt es, die genannte Frage verneinend zu beantworten. *Die Forderung des allgemeinen Auswahlaxioms geht also wesentlich über die angegebene spezielle Forderung hinaus.*

METHODEN DES NACHWEISES VON WIDERSPRUCHSFREIHEIT UND IHRE GRENZEN

Von P. BERNAYS, Göttingen

Die Methoden, mit denen vom finiten Standpunkt Beweise der Widerspruchsfreiheit für formalisierte Theorien geführt worden sind, lassen sich nach folgender Einteilung überblicken.

1. *Methode der Wertung*. Ihre wesentliche Ausbildung hat diese durch das *Hilbert*sche Verfahren des Ausprobierens der Wertung erhalten. Nach diesem Verfahren haben *Ackermann* und *v. Neumann* den Nachweis für die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie — allerdings unter der einschränkenden Bedingung erbracht, daß die Anwendung des Schlusses von n auf $(n + 1)$ bloß auf Formeln mit nur freien Variablen zugelassen wird.

2. *Methode des Ausintegrierens*. Diese ist nur auf solche Gebiete anwendbar, die man mathematisch vollkommen beherrscht. Für diese gestattet sie, nicht nur die Frage der Widerspruchsfreiheit, sondern auch die der Vollständigkeit und Entscheidbarkeit in einem völlig positiven Sinne zu beantworten. Solche Gebiete sind insbesondere

a) der einstellige Funktionenkalkul, welcher von *Löwenheim, Skolem* und *Behmann* abschließend behandelt worden ist.

b) Teilformalismen der Zahlentheorie. Auf solche haben *Herbrand* und *Presburger* die Methode angewendet. Es zeigt sich dabei, daß die *Peano*schen Axiome bei Zugrundelegung des Funktionenkalkuls der „ersten Stufe" (und der Gleichheitsaxiome) noch nicht zur Entwicklung der Zahlentheorie genügen. Erst durch die Hinzunahme der Rekursionsgleichungen für die Addition und die Multiplikation kommt die volle Zahlentheorie zustande [1]).

3. *Methode der Elimination.* Diese findet sich der Idee nach schon bei *Russell* und *Whitehead,* insbesondere in Anwendung auf den Begriff „derjenige, welcher". Die wirkliche Durchführung des Gedankens ist allerdings mühsam. Eine wesentliche Vereinfachung wird durch einen Ansatz von *Hilbert* bewirkt, der an die Einführung des „ε-Symbols" anknüpft.

Dieser liefert erstens — was *Ackermann* ausgeführt hat — noch einmal auf einem einfacheren Wege das Ergebnis der Wertungsmethode.

Außerdem aber gelangt man von hier aus zu einem neuen Beweise eines zuerst von *Herbrand* gefundenen und bewiesenen Satzes, welcher eine Umkehrung bildet von dem berühmten *Löwenheim*schen Satz über die Erfüllbarkeit im Abzählbaren, und der ein allgemeines Verfahren zur Behandlung von Fragen der Widerspruchsfreiheit liefert.

Die trotz der mannigfachen gewonnenen Einsichten vorliegende Begrenztheit der Ergebnisse stellt sich auf Grund des neuen *Gödel*schen Satzes über die Grenzen der Entscheidbarkeit in formalen Systemen, in Verbindung mit der daran geknüpften Vermutung *v. Neumanns*, als eine grundsätzliche dar.

---

[1]) Anders steht es, wenn man, wie *Dedekind,* von vornherein den Standpunkt der Klassenlogik zugrunde legt; dieser enthält jedoch stärkere Voraussetzungen, als für die Zahlentheorie nötig sind.

ANWENDUNG DER INTUITIONISTISCHEN LOGIK AUF DIE DEFINITION DER VOLLSTÄNDIGKEIT EINES KALKÜLS

Von A. HEYTING, Enschede

In der intuitionistischen Logik betrachten wir die folgenden nach klassischer Auffassung gleichwertigen Formeln:

I.	II.	III.
$p \vee q$.	1. $\neg p \supset q$.	1. $\neg\neg(p \vee q)$.
	2. $\neg q \supset p$.	2. $\neg(\neg p \wedge \neg q)$.
	3. $\neg\neg p \vee \neg\neg q$.	3. $\neg p \supset \neg\neg q$.
		4. $\neg q \supset \neg\neg p$.

Deutet man diese Formeln nach Kolmogoroff (Math. Z. 35, S. 58—65) als Probleme, so geht aus der Lösung von I die Lösung der Probleme unter II. hervor; aus der Lösung eines beliebigen der Probleme unter II. geht die Lösung sämtlicher Probleme unter III. hervor, aber nicht umgekehrt; ferner sind die Aufgaben unter II. verschieden, diejenigen unter III. aber gleichbedeutend.

Es sei ein beliebiger Kalkül K gegeben, von dem wir voraussetzen, daß er die klassische Aussagenlogik umfaßt; die klassische Negation werde mit $\sim$ bezeichnet. Die Aufgabe, eine Formel A aus K zu beweisen, gehört der intuitionistischen Mathematik an; wir bezeichnen sie mit βA. βx ist eine Problemfunktion, deren Argument x die Formeln aus K durchläuft. Ersetzen wir nun in den oben angeführten Formeln der intuitionistischen Logik p durch βx, q durch $\beta \sim x$, so erhalten wir verschiedene mögliche Definitionen der Vollständigkeit von K, von denen I. die stärkste, diejenigen unter III. die schwächsten sind. Durch die Substitution ist eine neue Abhängigkeit entstanden; die Formeln

$$\text{II. 1. } \neg \beta x \supset \beta \sim x \qquad \text{und} \qquad \text{II. 2. } \neg \beta \sim x \supset \beta x$$

sind gleichbedeutend, weil jede von ihnen in die andere übergeht, wenn x durch $\sim x$ ersetzt wird.

Um einige der erhaltenen Definitionen bequemer in Worte zu fassen, führen wir die folgenden Ausdrücke ein. Eine Formel A, für welche $\beta \sim A$ gilt, heißt *widerlegbar*; gilt $\neg\, \beta \sim A$, so heißt sie *unwiderlegbar*. Nun heißt

II. 1, „Wenn eine Formel nicht beweisbar sein kann, so ist sie widerlegbar";

II. 2: „Wenn eine Formel unwiderlegbar ist, so ist sie beweisbar." (Hilbert, Math. Annalen 102, S. 1—9.)

Die Formel $\neg(\neg\beta \sim x \wedge \neg\beta \sim\sim x)$, die den Formeln unter III. gleichwertig ist, lautet in Worten so: „Eine Formel und ihre Negation können in K nicht zugleich unwiderlegbar sein.“ (Hilbert, l. c.)

Eine weitere Abschwächung der Definition ließe sich in der folgenden Weise erreichen. Es bedeute φx eine beliebige der oben angegebenen Definitionen; dann sind $\neg\neg(x)\varphi x$ und $(x)\neg\neg\varphi x$ im allgemeinen schwächere Formeln, und zwar die zweite schwächer als die erste; die zweite kann auch in der Form $\neg(Ex)\neg\varphi x$ geschrieben werden. (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1930, S. 65.)

ÜBER DEN INTUITIONISTISCHEN BEWEIS DER PICARDSCHEN SÄTZE

Von M. J. BELINFANTE, Amsterdam

Eine den Forderungen der intuitionistischen Mathematik gerecht werdende Umgestaltung der klassischen Beweise für die Picardschen Sätze hat verschiedenartige Abänderungen zu berücksichtigen. Erstens spaltet sich jeder Satz in zwei einander ergänzende, von der klassischen Deutung als identisch betrachtete Theoreme:

I*a*. Ist $f(z)$ eine ganze variable Funktion, und sind a und b zwei von einander verschiedene, komplexe Zahlen, so läßt sich entweder eine Nullstelle von $f(z) - a$ oder eine Nullstelle von $f(z) - b$ bestimmen.

I*b*. Ist $f(z)$ ganz und gibt es zwei von einander verschiedene, komplexe Zahlen a und b derart, daß überall $f(z) \neq a$ und $f(z) \neq b$ ist, so ist $f(z)$ konstant [1].

II*a*. Hat die für $0 < |z - z_0| < R$ eindeutig-reguläre Funktion $f(z)$ in z_0 eine wesentlich singuläre Stelle, und sind a und b zwei beliebige von einander verschiedene komplexe Zahlen, während r eine beliebige positive Zahl kleiner als R ist, so läßt sich innerhalb des Kreises $|z - z_0| = r$ entweder eine Nullstelle von $f(z) - a$ oder eine Nullstelle von $f(z) - b$ bestimmen.

II*b*. Ist $f(z)$ eindeutig-regulär für $0 < |z - z_0| < R$ und sind zwei von einander verschiedene, komplexe Zahlen a und b derart gegeben, daß $f(z)$ dort keinen dieser beiden Werte annehmen kann, so läßt sich eine ganze Zahl m derart bestimmen, daß $\lim\limits_{z=z_0} (z - z_0)^m f(z) = 0$ ist.

[1]) Es ist I*b* eine unmittelbare Folge von I*a*, aber nicht umgekehrt; von den beiden folgenden Sätzen II*a* und II*b* ist keiner eine unmittelbare Folge des anderen.

Zweitens sind die unberechtigten Anwendungen des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, welche in den klassischen Beweisen auftreten, durch intuitionistisch einwandfreie Betrachtungen zu ersetzen, und schließlich sollen die Elemente der Funktionentheorie, so weit sie dort Anwendung finden, auf ihren intuitionistischen Gehalt geprüft und eventuell von neuem bewiesen werden. Es gibt hier einerseits Sätze, deren Richtigkeit leicht in der üblichen Weise festgestellt werden kann, anderseits solche, die beträchtliche Abänderungen in dem Beweisgang erfahren. Die Unzulänglichkeit der klassischen Beweise liegt entweder in dem Mangel an einem konstruktiven Verfahren oder in der Unmöglichkeit zu entscheiden, ob zwei Größen einander gleich oder von einander verschieden sind.

SUR LA MÉTHODE AXIOMATIQUE ET LES DIFFICULTÉS ACTUELLES

Par F. GONSETH, Zurich

L'unanimité est loin d'être faite sur le sens et la portée de la « méthode axiomatique ». En particulier, l'opinion selon laquelle les axiomes fournissent à eux seuls une espèce de définition implicite des notions fondamentales peut être sérieusement mise en doute. (On se souvient des critiques que Poincaré présentait à l'axiomatisation de la théorie des ensembles de M. Zermelo. Ces critiques subsistent encore, du moins partiellement.) Il convient, pour déterminer le rôle de la méthode axiomatique, de revenir à ses origines, c.-à-d. à son emploi dans la géométrie élémentaire. On rattachera au nom d'Euclide une première étape, dans laquelle les notions fondamentales sont des images idéales, schématiques et sommaires, suggérées par la connaissance préliminaire du monde physique. Les axiomes ne sont que la formulation, également schématique et sommaire, des lois physiques correspondantes. Disons que la droite, par exemple, est la *notion abstraite* correspondant à la *notion intuitive* de ligne de visée, et que celle-ci est une *réalisation* de la première.

On distinguera ensuite une seconde étape (qu'on pourra rattacher au nom d'Hilbert) où les notions fondamentales prendront forme de *concepts sans détermination préalable* et les axiomes celle de *relations de pure logique*. Le passage du premier stade (euclidien) au second (hilbertien) est en tous points analogue au passage des notions dites intuitives à celles du premier stade: ce sont alors les notions géométriques qui jouent

le rôle de réalisations et les nouveaux concepts celui de notions abstraites correspondantes.

On peut d'ailleurs atteindre le « plan du logique pur » sur un front beaucoup plus large, et comprenant, à côté de la géométrie, l'arithmétique (spécialement celle des nombres entiers) et la logique classique (spécialement la logique des classes). A propos de cette dernière, il faut remarquer que la notion fondamentale d'objet est elle aussi schématique et sommaire, et qu'elle est toute engagée dans la notion de « *propriété a priori* ». La notion intuitive de « *type* » permettrait de lui opposer une autre notion de l'objet: nous nommons *objet aristotelicien* celle qui est à la base de la logique classique. Cette notion appartient au premier stade axiomatique.

On peut maintenant caractériser la théorie des ensembles de Cantor comme une théorie des ensembles d'objets aristotéliciens. La tentative de M. Zermelo et les travaux qui s'en inspirent n'abandonnent pas complètement ce terrain, en ce sens que les éléments d'un ensemble y possèdent aussi au moins une propriété a priori: celle d'être un ensemble.

Or une analyse attentive des paradoxes montre que leur source commune est l'opposition entre la notion statique de l'objet aristotélicien et la notion de l'infini (en devenir). Dès lors il paraît assez naturel de chercher la solution des difficultés actuelles en faisant subir aussi aux notions de la logique classique et à celle de la théorie des ensembles l'axiomatisation au second degré qui les portera sur le plan de la logique pure.

Une esquisse de cette axiomatisation fait l'objet d'un travail qui vient de paraître[1]). *Il se présente qu'en effet, les antinomies ne trouvent plus place dans cette nouvelle théorie.*

LA FONCTION PROPOSITIONNELLE EN LOGIQUE ALGORITHMIQUE ET LE PRINCIPE DU TIERS EXCLU

Par ARNOLD REYMOND, Lausanne

Pour la logique classique la proposition simple ne comporte que deux valeurs, le vrai et le faux (dans lequel rentre l'absurde). Pour la logique algorithmique la fonction propositionnelle spécifie un groupe de faits, d'événements, etc. . . . jugés

[1]) *F. Gonseth.* Commentarii matematici helvetici. Vol. 5, 1933, pp. 108—136. (Vol. dédié au Congrès de Zurich, pp. 434 —462.)

possibles. Cela étant, le vrai désigne un possible réalisé, le faux un possible non réalisé, l'absurde (ni vrai, ni faux) un impossible irréalisable parce que dénué de signification.

Soit $\varphi(x)$ = „j'ai rencontré x dans les rues de Zurich". Pour x = un tigre, $\varphi(x)$ engendre une proposition qui peut être vraie ou fausse ; pour x = la tante du logarithme, $\varphi(x)$ conduit à une proposition absurde. En mathématiques le problème devient très délicat, parce que le champ assigné à la variable x peut être infini. Une affirmation comme „$2^x + 1$ est ou non un nombre premier" est-elle alors absurde, x pouvant être l'un quelconque des nombres entiers ?

Si l'on examine les couples de propositions opposées (*AE, AO, AI,* etc.) on est amené à distinguer dans leur emploi :

1) les *ensembles* simplement *quantitatifs* (hommes, mammouths, etc.) numériquement indéterminés et dont les éléments se groupent par „quelques, plusieurs, etc. . . . tous".

2) les *ensembles numériques,* finis ou infinis, c'est-à-dire déterminés explicitement par un nombre fini ou implicitement par une loi de succession. „Tous" a alors une valeur numérique.

Dans le cas 1) les universelles (hypothèses) n'ont pas la même portée existentielle que les particulières (faits constatés). Or un fait ne peut que confirmer (et non sans absurdité contredire) une hypothèse *vraie* ; et inversement pour une hypothèse *fausse.* Par conséquent dans le tableau des oppositions les contradictoires et les subalternes comportent les valeurs „vrai" et „absurde" ; et les contraires et sub-contraires les valeurs „vrai" et „faux".

Dans le cas 2) les universelles ont la même portée existentielle que les particulières, pour autant que dans la série des termes formant le domaine du „tous les . . ." la différence entre un terme et le suivant n'est pas $< \varepsilon$ ou $> N$. L'opposition (vrai-faux) entre „tous les . . ." et „quelque" subsiste alors formellement et légitime l'emploi du „tertium non datur". L'erreur partielle de Brouwer est de considérer comme tout à fait indéterminées des régions qui, sans être pratiquement calculables, sont néanmoins formellement déterminées (par exemple les décimales de π existent pour autant que la différence entre les polygones inscrit et circonscrit n'est pas $< \varepsilon$). L'élément $< \varepsilon$ est toujours en rapport avec une certaine unité de grandeur. De là le double aspect de l'unité numérique : propriété indivisible d'un élément discontinu (définition Frege-Russell) et grandeur divisible (sitôt que le continu intervient).

D'une façon générale le „ni vrai, ni faux" concerne soit „le non encore jugé", soit „le ne pouvant plus être jugé" parce que reconnu absurde (hors du champ de réalité qui a été défini) ; mais dans tout raisonnement le principe du tiers exclu intervient comme

ceux d'identité et de contradiction pour opposer, soit l'absurde au non absurde, soit dans le non absurde le vrai au faux. A ce point de vue on ne saurait en métamathématique raisonner sur P vrai, puis sur P faux, alors que P n'est peut-être ni vrai ni faux. Notre conviction absolue est que la logique mathématique est inséparable des notions $< \varepsilon$ et $> N$ qui règlent les exigences techniques du mathématicien.

EINE NEUE GRUNDLEGUNG DER DIFFERENTIAL-RECHNUNG DURCH KARL MARX

Von E. KOLMAN, Moskau

Das Moskauer Marx-Engels-Lenin-Institut besitzt an hundert Photokopien von bisher unveröffentlichten Handschriften Karl Marx' aus dem Gebiete der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik. Unter diesen Handschriften nehmen die mathematischen Arbeiten den ersten Platz ein. Es sind 31 verschiedene Exzerpte aus dem Gebiete der Arithmetik, Algebra, Analysis und Geometrie, 19 selbständige Entwürfe, vorwiegend die Begründung der Analysis betreffend, und außerdem Anwendungen der Mathematik in der politischen Oekonomie.

Wir sind hier imstande, über eine Arbeit Marxens zu referieren, die eine Skizze des historischen Entwicklungsganges des Differentialbegriffes und Marxens Standpunkt zur Grundlegung der Analysis enthält und infolgedessen vom größten Interesse sowohl für den Historiker als auch für den Philosophen der Mathematik ist. Sie widerlegt die sonst verbreitete Meinung, als ob Marx sich mit der Mathematik nur zur Zerstreuung befaßt hat und beweist, daß Engels in seiner Rede auf Marxens Grabe recht hatte, indem er behauptete, daß der geniale Verfasser des „Kapitals", Entdecker der Entwicklungsgesetze der menschlichen Geschichte und Schöpfer des dialektischen Materialismus, Begründer des wissenschaftlichen Sozialismus und Leiter der revolutionären Arbeiterbewegung „selbst auf dem Gebiete der Mathematik selbständige Entdeckungen gemacht hat". Diese Arbeit bildet den dritten Abschnitt eines in folgende fünf Abschnitte gegliederten Werkes: 1. Abgeleitete und der Differentialkoeffizient, 2. Das Differential und der Differentialkalkulus, 3. Die historische Entwicklung des Differentialkalkulus, 4. Taylors und Maclaurin's Theorem, 5. Kritik der Newtonschen Quadraturenmethode.

Der erste Teil dieses dritten Abschnitts, der sozusagen den Kern des ganzen Werkes bildet, enthält eine kurzgefaßte Darstellung der Methoden Newton und Leibnitz,

d'Alembert, Lagrange. Der zweite Teil, der den ersten summierend wiedergibt, besteht aus drei Paragraphen und hat folgenden Inhalt: 1. Der mystische Differentialkalkulus; 2. Der rationelle Differentialkalkulus; 3. Der rein algebraische Differentialkalkulus.

In einem anderen Fragment stellt Marx der Methode d'Alembert's und Lagrange's seine eigene Differentialmethode gegenüber. Von der Methode Lagrange's unterscheidet sich Marx' Methode dadurch, daß Marx wirklich differentiiert, wourch Differentialsymbole entstehen, während Lagrange das Differentiieren durch die algebraische Binomialzerlegung ersetzt.

Aus den beiden Fragmenten ist zu ersehen, daß Marx — und darin stimmte er mit Hegel überein — die Erfolglosigkeit jeglicher Anstrengungen eine rein formal-logische Grundlegung der Analysis zu geben, und die kindliche Naivität aller Versuche, dieselbe auf der bloßen sinnlichen Anschauung, auf graphischen Methoden zu begründen, erkannt hat. Und wenn er sich die Aufgabe stellte, die Analysis auf einer dialektischen Grundlage, gestützt auf die Einheit des historischen und logischen Momentes aufzubauen, so heißt das nicht, daß er die Analysis zur Arithmetik zurückführen wollte, wie es später, seit Weierstraß beginnend, diejenigen Mathematiker versucht haben, die vom mengentheoretischen Standpunkte ausgehend, schließlich, trotz ihrer großen Verdienste in der Weitervertiefung der mathematischen Problemstellung, zu den bekannten Paradoxien der Mengenlehre angelangt sind, die nicht nur das mathematische, sondern auch das logische von ihnen speziell errichtete Gebäude zerstört haben. Marx hingegen zeigt, wie aus der Elementarmathematik, auf ihrem eigenen Boden die wesentlich neue Differential- und Integralrechnung erwächst, die „als eine spezielle Rechnungsart, die bereits selbständig auf ihrem eigenen Boden operiert“, erscheint, so daß „die algebraische Methode von selbst in die ihr entgegengesetzte Differentialmethode schlägt“.

Marx schätzt die Arbeit Lagrange's an der Begründung der Analysis sehr hoch ein, doch faßt er nicht Lagrange, wie sonst üblich, und wie es auch Hegel getan hat, als einen typischen Formalisten und Konventionalisten auf, der die Grundbegriffe der Analysis in die Mathematik rein äußerlich und auf willkürliche Weise einführt. Nein, Marx schätzt gerade das Gegenteil in ihm, und zwar, daß Lagrange den Zusammenhang zwischen Algebra und Analysis aufdeckt, daß er zeigt, wie die Analysis aus der Algebra hervorwächst. „Die wirklichen und daher einfachsten Zusammenhänge des Neuen mit dem Alten“, schreibt Marx, „werden immer entdeckt, sobald das Neue selbst schon eine in sich abgerundete Form gewonnen, und man kann sagen, daß der Differentialkalkulus diese relatio erhielt durch die Taylorschen und Maclaurinschen Theoreme. Es fiel daher erst Lagrange zu, den Differentialkalkulus auf strikt algebraische Basis zurückzuführen.“ Doch gleichzeitig wirft Marx La-

grange vor, daß derselbe den dialektischen Charakter dieser Entwicklung übersah und zu lange auf dem Boden der Algebra stecken geblieben ist, die eigenen Gesetzmäßigkeiten und Methoden der Analysis unterschätzt hat: „ist er in dieser Hinsicht nur als Ausgangspunkt zu benutzen."

So kämpft Marx als wahrer Dialektiker sowohl gegen die rein analytische Zurückführung des Neuen zum Alten, die so charakteristisch für die Methodologie des *mechanistischen* Materialismus des XVIIII. Jahrhunderts war, als auch gegen die rein synthetische Einführung des Neuen von außen her, was nicht nur für den Hegelischen Standpunkt, sondern auch für den heutigen Intuitionismus bezeichnend ist, der das Prinzip der mathematischen Induktion für dasjenige Neue hält, das von außenher kommt, und der auf diese Weise den Uebergang zwischen der Logik und der Mathematik vernichtet. Während jedoch dies Neue, das nur als Fremdes in die mathematische Theorie eingehen konnte, nach Hegel immerhin aus der Außenwelt, aus der Praxis entliehen war, so hält der heutige mathematische Idealismus für die Quelle des Neuen wiederum nur die Kantsche Anschauung a priori — die berüchtigte Intuition; die philosophischen Einstellungen entwickeln sich hier nach rückwärts.

Das besprochene Fragment wird im „Archeïon", die gesamten mathematischen Schriften Marxens, deren Herausgabe Frau Prof. Janowskaja leitet, werden in den Werken des Marx-Engels-Lenin-Instituts (Moskau) demnächst erscheinen.

PÄDAGOGIK
UND VERHANDLUNGEN DER INTERNATIONALEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHTSKOMMISSION

SUR L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Par S. CARRUS, Alger

Comment doit être compris dans les Facultés ou Grandes Ecoles l'enseignement des hautes Mathématiques: Importance primordiale du développement de la faculté de raisonnement des Etudiants.

Nous voulons exposer de quelle façon nous semble devoir être conduit l'enseignement des hautes Mathématiques. Lorsqu'il s'agit d'étudiants arrivant à l'extrême limite d'un enseignement scolaire (Grandes Ecoles, Facultés), il nous semble que le but principal de l'enseignement doit être, désormais, de leur *apprendre à raisonner.*

Il faudra, non seulement, augmenter leurs connaissances, leur donner de nouveaux instruments de travail, mais surtout exercer leur esprit à raisonner mathématiquement. On y arrivera en obligeant, le plus possible, les étudiants à raisonner eux-mêmes. Le Professeur ne doit plus être qu'un guide, indiquant les sujets d'études successifs : les résultats doivent être établis par les élèves eux-mêmes : Plus de cours dicté ou exposé, plus de maître énonçant un théorème, donnant la démonstration, ne se préoccupant même pas de savoir si les étudiants comprennent et passant au théorème suivant. Plus d'étudiants se contentant de suivre, à moitié somnolents, les raisonnements faits.

Il faut que, à tout instant, le maître s'adresse à ses étudiants, leur demande ce qu'il y a à faire, de continuer la démonstration, ce qu'ils savent sur la question, ce qu'ils remarquent...

Peu à peu il leur apprendra ainsi à rassembler leurs connaissances, à voir et à savoir se servir de ce qui peut leur être utile.

Cette méthode demande beaucoup de temps. Deux fois plus ? Qu'importe ! si les progrès sont quadruples. Il est fort regrettable que, dans les conditions actuelles, les obligations des horaires ne permettent pas de l'appliquer intégralement.

Cette méthode peut être également appliquée dans les ouvrages de haut enseignement mathématique. Nous l'avons essayée dans notre Cours de Calcul différentiel et intégral : des signes conventionnels (lettres grecques) sont intercalés tout le long des démonstrations, remplacent à chaque instant les questions qui pourraient être faites par le Professeur. Il faut que l'étudiant s'efforce de répondre à la question posée.

Nous n'avons, certes pas, la prétention, quand nous écrivons la lettre δ que, du premier coup, l'étudiant saura continuer la démonstration, que, à la lettre ϱ, il saura remarquer... Mais d'abord, s'il ne peut répondre, le texte répond pour lui. Et après un grand nombre d'efforts de réflexion, il se rendra compte que ce qu'on lui

demande est fort simple ; il s'habituera au mode de démonstration toujours employé. Par un lent travail, se développera en lui la formation au raisonnement mathématique ; il s'habituera à rassembler ses connaissances. Voilà, du moins, ce que l'on peut espérer. Peut-être, me fais-je illusion ? Je ne puis juger que par mon expérience personnelle. Elle est insuffisante. Pour le Cours imprimé, j'ai demandé l'opinion de mes étudiants qui me disaient avoir appliqué la méthode. Mais cette opinion me paraît suspecte : je devais être un juge en fin d'année.

Pour se rendre compte de l'utilité de cette méthode, il faudrait que les expériences soient multipliées. Il faudrait que, dans un Cours, on puisse appliquer intégralement la méthode. Il faudrait que soient rassemblées, coordonnées, toutes les observations. Du total de ces observations, finirait par sortir la réponse à la question : Y a-t-il ou non utilité ?

Je serais très reconnaissant à tous ceux qui voudront bien m'en faire part.

RÉSUMÉ DU RAPPORT DE L'INSTITUT INTERNATIONAL DE COOPÉRATION INTELLECTUELLE CONCERNANT LA COORDINATION DE L'ÉCONOMIE SCIENTIFIQUE INTERNATIONALE

Par A. ESTABLIER, Paris

Les questions d'économie scientifique internationale, qui avaient très souvent été négligées par les savants, commencent à prendre une importance toute particulière. Il serait souhaitable que les fonds et les heures de travail consacrés aux travaux bibliographiques, ainsi que les malentendus résultant des divergences de nomenclature, etc. . . ., soient réduits ou éliminés, par un effort de collaboration internationale entre les personnalités du Monde scientifique.

L'Organisation internationale de Coopération intellectuelle de la Société des Nations a, dans son programme d'activité, un certain nombre de points qui ont été inscrits sur la demande d'organisations ou de personnalités qualifiées, après avis d'un Comité de Conseillers scientifiques, réuni en 1931 sous la présidence de Mme *Curie-Sklodowska.*

Parmi les points les plus importants du programme établi par le Comité des Conseillers scientifiques, se trouvent, celui de la Coordination des terminologies scienti-

fiques, celui de la Collaboration entre les musées scientifiques, celui de la Coordination des bibliographies scientifiques. Sur chacun de ces points l'Institut international de Coopération intellectuelle a entrepris des efforts dans la mesure de ses possibilités, et les résultats acquis démontrent la volonté de collaboration internationale qui anime le monde scientifique. En ce qui concerne les mathématiques, l'Institut s'est trouvé en présence de la proposition du Prof. *Severi,* qui a siégé au Comité des Conseillers scientifiques où il a présenté un projet demandant, outre la création de centres nationaux de bibliographie mathématique, celle d'un centre international qui devrait servir de lien entre les premiers, et rendrait, à son avis, de véritables services aux mathématiciens.

TECHNICAL VOCABULARIES FOR PLANE AND SOLID GEOMETRY

By ELIZABETH B. COWLEY, Pittsburgh

The studies of general vocabularies and vocabularies for school subjects that have been made in recent years indicate a growing recognition of the need for a more accurate understanding of the pupils' word knowledge.

Unfortunately some of these studies for geometry bear unmistakable evidence of poor workmanship.

The author of the present paper has been working on geometry vocabularies for five years and has already published a preliminary report (in the Journal of Educational Research for December, 1929).

The present paper includes:—

(1) A careful examination and evaluation of some of the recent studies that are open to serious criticism.

(2) The results obtained from a vocabulary questionnaire sent to about three thousand students of geometry in the public high schools of Pittsburgh, Pennsylvania.

(3) Discriminating word studies of four recent texts and of one published twenty years ago.

(4) The technical vocabularies.

The guiding principles used in selecting the vocabularies are:—

(a) The vocabularies are in harmony with the report of the National Committee

on Mathematical Requirements (The Reorganization of Mathematics in Secondary Education).

(b) The chief source of words for the basic vocabularies is the lists of theorems and constructions published by the National Committee, the College Entrance Examination Board, and the University of the State of New York.

(c) In additional to the basic vocabularies, there are secondary vocabularies which contain words that are often used but are not indispensable.

(d) Words listed in E. L. Thorndike's *The Teacher's Word Book* or in Ernest Horn's *A Basic Writing Vocabulary* are rated as not technical.

(e) Words that occur only occasionally in a few exercises (especially in applications of geometry to other subjects) are not a legitimate part of either a basic or a secondary technical vocabulary of geometry.

(f) The great variety of social, economic, and intellectual backgrounds of geometry students of to-day are taken into account.

(g) As a vocabulary is a living, growing thing, a separate list is made of those words whose usefulness is decreasing rapidly although they are still considered part of a technical vocabulary.

(h) The vocabularies for solid geometry consist of those for plane geometry plus additional lists built in a similar manner.

SUR QUELQUES DÉFINITIONS ET THÉORÈMES DE L'ARITHMÉTIQUE

Par MARIE ZERVOS, Athènes

Dans une communication faite au Congrès de Bologne [1]) j'avais donné une expression nouvelle de la définition des nombres premiers et j'y avais indiqué des conséquences qui en résultent.

De nouvelles recherches m'ont montré qu'on peut, en s'appuyant sur l'idée d'ordre, qui m'a conduit à donner la dite expression, fonder une méthode pour exprimer d'une manière nouvelle beaucoup de théorèmes de l'Arithmétique et étendre encore cette manière d'expression à certaines propriétés des congruences du premier degré.

Je me bornerai ici à indiquer la modification de l'expression qui survient à quelques théorèmes de l'Arithmétique élémentaire.

[1]) Atti del Congresso internazionale dei Matematici Bologna.

Considérons le tableau (A) (voir travail cité).

On pourrait supprimer la première ligne, alors nombre premier est celui qui se trouve seulement dans une ligne du déterminant: on modifierait alors également les autres définitions données dans le travail cité.

Il est évident que :

1° Tout nombre composé se trouve dans une ligne au moins dont le premier élément est un nombre premier ;

2° deux entiers consécutifs ne peuvent pas se trouver dans une même ligne.

Ceux-ci posés, on peut montrer que si aucun des deux nombres α, β se trouve dans une ligne d'indice p, où p est un nombre premier, ne se trouvera aussi dans la même ligne ni le produit $\alpha\beta$ (voir travail cité); par conséquent, si le produit $\alpha\beta$ se trouve dans la ligne p, où p est un nombre premier, un au moins des facteurs α, β se trouve dans la ligne p. Il en résulte aisément que s'il est impossible de trouver

1° dans une même ligne les nombres α, β,

2° dans une même ligne les nombres α, γ,

alors il sera impossible de trouver dans une même ligne les nombres α et $\beta\gamma$ etc. Il s'ensuit immédiatement de plusieurs théorèmes de l'Arithmétique.

Nous exprimons aussi d'une manière un peu différente de l'ordinaire la démonstration du théorème que la suite des nombres premiers est illimitée : autrement dit que, étant donné un nombre premier p, il en existe un plus grand. Considérons, en effet, le nombre $\varphi(p) + 1$, où $\varphi(p)$ est le nombre qu'on forme en multipliant entre eux tous les nombres premiers depuis 2 jusque p. Si le nombre $\varphi(p) + 1$ n'est pas premier, il se trouvera, d'après la remarque 1°, au moins un élément $a_{\varkappa\lambda}$ tel qu'on a en même temps $a_{\varkappa\lambda} = \varphi(p) + 1$ et $a_{\varkappa 1}$ un nombre premier et, comme $\varphi(p)$ se trouve dans chacune des lignes contenant 2, 3, . . p, d'après la remarque 2°, le nombre $a_{\varkappa 1}$ est un nombre premier plus grand que p.

SITZUNG VOM MITTWOCH 7. SEPTEMBER

Vorsitz: D. E. Smith.

THE INTERNATIONAL COMMISSION ON THE TEACHING OF MATHEMATICS

By DAVID EUGENE SMITH, President, New York

This Commission was organized at the Rome Congress in 1908. The Central Committee of organization was fortunate in securing for its president a man of highest mathematical ability and one who was interested in all phases of the teaching of the subject,—Professor Felix *Klein* of Göttingen. The vice-president, Sir George *Greenhill* of London, represented mathematics chiefly as applied to physical problems. The secretary, Professor *Fehr* of Geneva, editor of *L'Enseignement Mathématique,* represented the teaching aspect. The committee added to its numbers and secured the cooperation of the national education departments of the various countries represented at the Congress.

During the next four years an intensive study was made of the courses of mathematical instruction in all these countries. By 1912, when the Congress met at Cambridge, about 200 reports had been published,—the first great world survey of any major subject. The importance and influence of this survey can hardly be overestimated. It enabled the leaders in the teaching of the subject to become internationally minded.

The work, however, was not completed, owing to well-known world conditions. In particular, the study of the training of teachers was hardly begun. The Bologna Congress therefore made certain necessary changes in the membership of the Commission and directed that this study be continued by new national committees, the reports to be summarized by Professor Loria of Genova. This has been accomplished as well as world conditions and the universal financial depression have permitted, but is not yet completed.

Two important questions now arise with respect to the future:

1) Shall the work of the Commission be continued?

2) If so, what shall be its nature?

During my presidency, now definitely coming to a close, I have naturally given much attention to the problem, consulting my colleagues on the various aspects of the matter, and I feel that never before has there been such a need for a searching inquiry into the trend of mathematics in the schools, the colleges, and the universi-

1928—1932. RAPPORT SOMMAIRE

Par H. FEHR, Secrétaire-général, Genève

L'exposé que vient de nous faire notre président, M. le Professeur David Eugen Smith, me dispense de revenir sur le but que poursuit notre Commission et sur les
travaux c
rayons de
iumes. Il
internatic
dont la re
borateurs
Pendan
composé c
MM. *I*
J. Hadan
Lietzman
Les dis
firmées. I

ties of the world as there is at present. The revolution of ideas which is going o in every phase of life has not failed to concern mathematics.

I therefore propose that the present Commission proceed to reorganize itself an to make contact with the various countries, either through the national department of education or through the leading national societies of teachers of mathematics and arrange to report in 1936 on the present general trend in the teaching o the subject.

That this trend is changing radically in certain countries is apparent; that it i changing to some degree the other countries is equally evident. That the Commis sion will add to its membership some of the younger men and women who are t direct this trend in safe lines is to be expected. The best possible aid to the teachin of mathematics in the next generation is to make known in each country th substantial trend in all other countries.

une contribution de frs. suisses 400.— payables en un ou plusieurs versements. Ces allocations sont destinées à couvrir les dépenses du secrétariat général, notamment les frais d'impression des rapports. Ces dépenses sont d'ailleurs limitées au strict nécessaire : pendant la période de vingt ans qui s'est écoulée de 1912 à fin 1931, les frais se sont élevés à fr. 8.229.50, laissant un déficit de fr. 956.— provenant des cotisations arriérées.

Chargé par le Congrès de Bologne de reconstituer à nouveau la Commission, le Comité central s'est adressé à tous les pays ayant pris part à ce Congrès. La Commission comprend actuellement des représentants des pays suivants :

Allemagne, Angleterre, Argentine, Australie, Autriche, Belgique, Canada, Colonie du Cap, Danemark, Etats-Unis d'Amérique, France, Hongrie, Italie, Norvège, Pologne, Portugal, Roumanie, Suède, Suisse, Tchécoslovaquie, Yougoslavie.

Des démarches sont encore en cours auprès de plusieurs pays qui, nous l'espérons, ne tarderons pas à renouveler ou à donner leur adhésion.

Qu'il me soit permis de remercier ici publiquement les gouvernements, autorités scolaires et associations qui n'ont cessé d'encourager et de subventionner nos travaux.

Nous tenons à rappeler ici la série des rapports dûs à l'initiative de la sous-commission américaine et destinés à exposer, pour les principaux pays, « les modifications essentielles de l'enseignement mathématique dans les principaux pays depuis 1910. » Ces rapports ont été publiés simultanément dans le Yearbook of the Council of Teachers, à New York et dans *l'Enseignement Mathématique*. Ils concernent les pays suivants : Allemagne, Angleterre, Autriche, Etats-Unis, France, Hollande, Japon, Italie, Scandinavie, Suisse, Tchécoslovaquie et Russie. D'autres pays voudront sans doute se joindre à cette liste ; leurs rapports seront les bienvenus.

Conformément aux vœux exprimés au Congrès de Bologne, le Comité central s'est attaché tout particulièrement à l'étude de la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques.

Le plan général des travaux avait déjà été établi au lendemain de la Conférence internationale tenue à Paris en avril 1914. Le questionnaire a été revu et complété. M. le Professeur Loria a bien voulu se charger du rapport que nous aurons le privilège d'entendre tout à l'heure. Son exposé sera publié dans *l'Enseignement Mathématique* avec un aperçu de la discussion ; il sera suivi d'un extrait des principaux rapports et documents fournis par les collaborateurs.

Au nom du Comité central, j'exprime dès maintenant toute notre gratitude au rapporteur général, M. le Professeur Loria et à MM. les délégués qui ont bien voulu répondre à notre questionnaire. Nous nous félicitons de pouvoir constater, qu'en dépit des obstacles que l'on rencontre dans d'autres domaines, la collaboration internationale dans celui de l'enseignement mathématique n'a jamais fait défaut.

LA PRÉPARATION THÉORIQUE ET PRATIQUE DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Par GINO LORIA, Genova

En avril 1914, la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique a pris l'initiative d'une étude générale sur la préparation des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans les divers pays. Le travail a été repris au lendemain du Congrès de Bologne. Une nouvelle édition du questionnaire a été adressée à tous les pays représentés dans la Commission. Treize délégations ont bien voulu fournir les renseignements nécessaires, tandis qu'aux Etats-Unis une commission spéciale poursuit encore l'étude de ces questions. Dans ce rapport général (que l'auteur considère comme une sorte d'avant-propos du fascicule dans lequel seront réunis des extraits des rapports nationaux) se trouvent rapidement indiquées les différentes questions relatives à l'instruction des futurs professeurs de l'enseignement secondaire, avec des aperçus sur les solutions adoptées ou proposées dans les différents pays. Au lieu de se servir de la forme classique d'un rapport, l'auteur a préféré donner à son exposé la forme d'un dialogue avec un jeune homme s'intéressant à tout ce qui a trait aux mathématiques et à leur enseignement.

DER GEGENWÄRTIGE ZUSTAND DER FRAGE DER AUSBILDUNG DER MATHEMATIK-LEHRER IN DEUTSCHLAND

Von G. HAMEL, Berlin

Gestatten Sie, daß ich Sie kurz noch etwas ausführlicher über einige Dinge unterrichte, die in Deutschland augenblicklich im Vordergrund stehen und von denen ich annehmen kann, daß sie als zum Thema gehörig, Ihr Interesse erregen werden.

Zunächst etwas Organisatorisches: In Deutschland bildete sich 1921 ein mathematischer Reichsverband, kurz M.R. genannt, eine Spitzenorganisation der mathematisch-wissenschaftlich und mathematisch-pädagogisch interessierten Vereine und Ge-

sellschaften. Er steht mit dem Damnu (Deutscher Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht) in engster Verbindung, ebenso mit dem Förderverein. Seine Aufgabe ist die Vertretung der Mathematik in Leben und Schule, Verteidigung ihrer Stellung und Ausweitung ihres Wirkungsbereiches. Die pädagogischen Probleme gehören so weit zu seinem Aufgabenkreis, als sie sowohl Hochschule wie höhere Schule (Mittelschule) anbetreffen. Vorsitzender des Arbeitsausschusses des M.R. ist augenblicklich der Berichter.

Die Probleme, die den M.R. jetzt besonders beschäftigen, sind die folgenden: Die akademische Lehr- und Lernfreiheit, die wir in Deutschland haben und an der unbedingt festgehalten werden soll, bringt bei der fortdauernden Entwicklung unserer Wissenschaft Schwierigkeiten mit sich. Man hat von einer doppelten Diskontinuität gesprochen: Der ersten zu Beginn des Studiums, wo der junge Student sich an die ganz andere Art des Hochschulunterrichtes gewöhnen muß und der Professor zu leicht vergißt, daß auch der Begabte nicht gleich die höchsten Abstraktionen begreift; und von der zweiten, bei Uebergang des werdenden Lehrers von der Hochschule in die Schule, wo die Aufgabe an ihn herantritt, die erworbene Wissenschaft so umzuschmelzen, daß sie Schülern verständlich wird. Dadurch, daß wir jetzt obligatorisch fast in allen Schulen Differentialrechnung und meist auch Integralrechnung betreiben, ist gerade dieses Problem recht brennend geworden. Es gilt also, den Hochschulunterricht so auszugestalten, daß er dem zukünftigen Lehrer das gibt, was er für die Schule braucht, ohne daß darunter die Wissenschaftlichkeit leidet. Der Lehrer soll Fachmathematiker werden, aber kein eigentlicher Gelehrter. Hier liegt ein Problem, wir versuchen, es durch wiederholte Aussprachen zwischen den Hochschullehrern unter Mitwirkung erfahrener Schulmänner in freier Uebereinkunft zu lösen, ohne eine Regelung von seiten der Behörde anzustreben und, dies sei wiederholt, unter Wahrung voller Lehr- und Lernfreiheit.

Die Ausgestaltung der Prüfungsordnung für die Kandidaten des höheren Lehramtes gibt den äußeren Rahmen. Dazu gehört ein zweites Problem, das der Wahl der Lehrfächer, von denen in Preußen der Kandidat bis jetzt beliebig drei (zwei Haupt- und ein Nebenfach) wählen kann. (In einigen süddeutschen Staaten bestehen Bindungen.) Zwischen diesem Extrem der völlig freien Wahl der Fächer und einer ganz strengen Bindung (beispielsweise Mathematik und Physik als Hauptfächer, Biologie oder Chemie als Nebenfach) gilt es ebenfalls eine vernünftige Mitte zu finden, die Einheitlichkeit des Studiums gewährleistet, aber besonders gearteten Talenten doch freie Bahn läßt. Das Problem der Ueberlastung des Studenten will hierbei wohl beachtet werden; schon jetzt studiert auch der künftige Lehrer vielfach zu lange.

SÉANCE DU VENDREDI 9 SEPTEMBRE

Présidence : D. E. Smith, J. Hadamard.

Les renseignements complémentaires fournis par M. le Prof. Hamel ont été suivis, dans la séance du vendredi 9 septembre, d'une discussion sur quelques-uns des objets du rapport de M. le Prof. Loria.

Puis vint une partie administrative consacrée au renouvellement du Comité central et à l'examen du plan de travail pour une nouvelle période de quatre ans.

La Commission a enregistré avec regret la décision de M. le Prof. D. E. Smith de se retirer du comité pour raison d'âge et de santé. En reconnaissance des services rendus à la Commission dont il a été le principal initiateur et l'un des membres les plus actifs, M. D. E. *SMITH* a été nommé Président d'honneur de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

Résolutions. — Après discussion la Commission et la Section VIII ont adopté les résolutions suivantes à soumettre à l'approbation du Congrès:

1. Le Congrès invite la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique à poursuivre ses travaux; il n'en résultera aucune obligation financière pour le Congrès et la Section VIII.

2. Jusqu'au Congrès de 1936 le Comité central sera composé de MM.

J. Hadamard (Paris), Président
P. Heegaard (Oslo) }
W. Lietzmann (Goettingen) } Vice-présidents,
G. Scorza (Naples) }
H. Fehr (Genève), Secrétaire-général et Trésorier.

Il pourra désigner un ou plusieurs vice-présidents, un secrétaire-adjoint et d'autres membres entre autres M. E. H. Neville (Reading, Angleterre); il pourra nommer des membres honoraires. Le Comité central pourra constituer des sous-commissions nationales en s'adressant aux Gouvernements où aux Associations mathématiques; il incombera aux sous-commissions nationales de faire les démarches utiles en vue d'obtenir les contributions permettant de couvrir les dépenses du secrétariat général.

3. La Commission est invitée à élaborer un rapport sur *les tendances actuelles dans le développement de l'enseignement mathématique dans les divers pays.* Les rapports nationaux seront exposés personnellement par leurs auteurs au prochain Congrès ; les rapports complets seront remis au secrétaire-général.

BESCHLUSS DER INTERNATIONALEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHTSKOMMISSION

in der gemeinsamen Sitzung mit der Sektion VIII vom 9. September 1932.

1. Die Internationale Mathematische Unterrichtskommission setzt ihre Arbeiten fort ohne irgendwelche geldlichen Verpflichtungen seitens des Kongresses oder seitens der Sektion VIII.

2. Den Hauptausschuß bilden:

J. Hadamard (Paris), Präsident,
P. Heegaard (Oslo), W. Lietzmann (Göttingen), G. Scorza (Neapel) — Vizepräsidenten,
H. Fehr (Genf), Generalsekretär und Schatzmeister.

Der Hauptausschuß wird zur Zuwahl eines Hilfssekretärs, von Vizepräsidenten, von Mitgliedern, unter ihnen Prof. Neville (Reading, England) und Ehrenmitgliedern ermächtigt. Aufgabe des Hauptausschusses ist es, in den Ländern Unterausschüsse ins Leben zu rufen. Diese können, je nach den Umständen, durch Unterrichtsbehörden, durch mathematische Vereinigungen oder selbständig eingesetzt werden. Die Unterausschüsse sind verpflichtet, für die Geschäftsführung an das Sekretariat einen Beitrag zu den Unkosten zu leisten.

3. Die Kommission soll einen Bericht *über die gegenwärtigen Entwicklungstendenzen im mathematischen Unterricht der verschiedenen Länder erstatten.* Die Einzelberichte sollen von den Vertretern der einzelnen Länder möglichst persönlich auf dem nächsten Kongreß in Oslo (1936) erstattet werden; die vollständigen Berichte werden dem Generalsekretariat zur Verfügung gestellt.

Resolutions.—During its session of Wednesday, September 9, 1932, the International Commission on the Teaching of Mathematics and Section VIII, adopted the following resolutions subject to the approval of the Congress.

(1) That the Congress invite the International Commission on the Teaching of Mathematics to continue its work; that this action should not involve either the Congress or Section VIII in any financial obligation.

(2) That until the Congress of 1936 the Central Committee will be composed of:

J. Hadamard (Paris), President
P. Heegaard (Oslo), W. Lietzmann (Goettingen), G. Scorza (Napoli) — Vice-Presidents,
H. Fehr (Geneva), General Secretary and Treasurer.

One or more vice-presidents, an assistant secretary; and other members including M. E. H. Neville (Reading, England), may be added; honorary members may also be appointed.

The Central Committee may be create national subcommissions either by applications to the Governments or to the Mathematical Associations; national subcommissions are bound to undertake useful work toward collecting contributions which will cover the expenses of the general secretariat.

(3) The Commission is invited to elaborate a report concerning présent tendencies in the development of mathematical teaching in the various countries;

Authors of national reports will be called upon to present these in person at the next Congress; the complete reports must be sent in to the General Secretary.

Risoluzione. — Nella sua seduta di venerdì 9 settembre 1932 la Commissione Internazionale dell'insegnamento matematico e la Sezione VIII hanno adottato la seguente risoluzione da sottomettere all'approvazione del Congresso:

1. Il Congresso invita la Commissione Internazionale dell'insegnamento matematico a continuare i suoi lavori senza alcun impegno finanziario da parte del Congresso o da parte della Sezione VIII.

2. Fino al Congresso del 1936 il Comitato centrale risulterà composto dei seguenti membri:

Prof. J. Hadamard (Paris), Presidente
„ P. Heegaard (Oslo)
„ W. Lietzmann (Goettingen)
„ G. Scorza (Napoli)
} Vice-presidenti,
„ H. Fehr (Ginevra), Segretario Generale e tesoriere.

Il Comitato Centrale potrà designare uno o più Vicepresidenti, un Vicesegretario e altri membri e tra questi il Prof. Neville (Reading, England); potrà altresì nominare dei membri onorari.

Il Comitato centrale potrà costituire dei sottocomitati nazionali rivolgendosi ai Governi o alle associazioni matematiche; spetterà ai sottocomitati di adoprarsi in modo utile onde ottenere i contributi che possano permettere di coprire le spese del segretario generale.

3. La Commissione è invitata a elaborare un rapporto sulle tendenze attuali sullo sviluppo dell' insegnamento matematico nei diversi paesi. I rapporti nazionali saranno esposti personalmente dagli autori al prossimo Congresso, i rapporti completi saranno consegnati al Segretario generale.

Ces résolutions ont été approuvées à l'unanimité par le Congrès dans sa séance de clôture du lundi 12 septembre 1932.